Úvod

První část skript Elementární matematika byla vydána v roce 1995 a obsahovala kapitoly Rovnice, Teorie čísel, Kombinatorika a Planimetrie.

Druhá část, která obsahuje kapitoly Algebraické výrazy, Posloupnosti a řady, Pravděpodobnost a Stereometrie, vychází s odstupem dvou let a je, pokud jde o třídění materiálu, snad trochu zralejší. Cíle, tak jak byly formulovány v první části, zůstávají beze změny.

Dodejme, že do kapitoly Posloupnosti a řady jsou zařazeny úlohy z úrokování, které se pomalu, ale neodvratně stává důležitým tématickým celkem osnov matematiky středních škol.

Terminologie, kterou ve skriptu používáme, je intuitivní. Předpokládáme, že čtenář má ze střední školy představu o tom, co je algebraický výraz, posloupnost, řada apod. Tyto termíny nezavádíme a přesné definice budou dány v dalších přednáškách. Pouze tam, kde by mohlo případně dojít k nedorozumění, dáváme přesnější vymezení pojmu.

Ve skriptu se jistě kromě záměrných chyb, na které je upozorněno známým symbolem, vyskytují též chyby neúmyslné. Upozornění na každou takovou chybu či návrh na vylepšení textu s radostí uvítáme.

Kromě literatury uvedené v seznamu použité literatury byly použity písemné materiály určené pro International Baccalaureate.

V Praze dne 26. 2. 1997 Autoři

Poděkování: První vydání skript vyšlo v roce 1997. Některé chyby, nepřesnosti a nejasnosti textu jsme při používání skrit odhalili sami, na mnohé nás upozornili posluchači nebo kolegové. Těmto bychom rádi vyjádřili naši vděčnost. Zejména cítíme potřebu poděkovat kolegovi RNDr. Jaroslavu Zhoufovi, Ph.D. za pečlivé čtení textu a odhalení některých vážných, ukrytých a záludných chyb. Jsme přesvědčeni, že ani po této masivní opravě není text bez chyb a budeme zavázáni každému, kdo nás na chyby upozorní.

V Praze dne 18. 9. 2001 Autoři

Použité značky

$\mathbf{N}$	– množina všech přirozených čísel
$\mathbf{N}_0$	– množina všech přirozených čísel s nulou
$\mathbf{Z}$	– množina všech celých čísel
$\mathbf{Q}$	– množina všech racionálních čísel
$\mathbf{R}$	– množina všech reálných čísel
Δ	– chyba, které jsme se dopustili při aproximaci
$\diamond$	– znak pro $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $=$
$\sum_{i=1}^{n} f(i)$	– součet $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$
$\{\}$	– prázdná množina
$P(A)$	– pravděpodobnost jevu A
$C(k,n) = \binom{n}{k}$, $n, k \in \mathbf{N}$	– kombinační číslo n nad k
$V(k,n)$, $n, k \in \mathbf{N}$	– variace k-té třídy z n prvků
$\|AB\|$	– velikost (délka) úsečky AB
$\|\triangle OMN\|$	– obsah trojúhelníka OMN
$\| < AOB\|$	– velikost úhlu AOB
$C = A - \bullet - B$	– bod C je střed úsečky AB

Použitá literatura

[1] Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. SPN Bratislava, 1990.

[2] Maška, O.: Matematika v úlohách. I. Aritmetika a algebra. Školní příručky „Dědictví Havlíčkovo“. Svazek 25. Brno 1927.

[3] Hejný, M.: Stereometria (Experimentálny učebný text pre gymnáziá). SPN Bratislava, 1980.

[4] Hecht, T., Sklenáriková, Z.: Metódy riešienia matematických úloh. SPN Bratislava, 1992.

[5] Švrček, J., Vančura, J.: Geometrie trojúhelníka. SNTL Praha, 1988.

[6] Križalkovič, K., Cuninka, A., Šedivý, O.: Riešené úlohy z modernej matematiky. 2. Alfa, 1981.

Kapitola 1

Algebraické výrazy

1.1 Odmocniny

Příklad 1

Odstraňte odmocninu ze jmenovatele a výraz upravte do co nejjednoduššího tvaru:
(a) $\frac{2a}{3+\sqrt{2a}}$, (b) $\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$, (c) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$.

Řešení

(a) Odmocninu ve jmenovateli odstraníme známým způsobem použitím vzorce $x^2 - y^2 =$ $= (x-y)(x+y)$. Rozšíříme tedy daný zlomek výrazem $3-\sqrt{2a}$ a dostaneme

$$\frac{2a(3-\sqrt{2a})}{(3+\sqrt{2a})(3-\sqrt{2a})} = \frac{6a-2a\sqrt{2a}}{9-2a}.$$

Výsledek: $\frac{6a-2a\sqrt{2a}}{9-2a}$ pro $a \neq \frac{9}{2}$.

Zapomněli jsme diskutovat hodnotu výrazu pro $a = \frac{9}{2}$. Přestože výsledný výraz nemá pro tuto hodnotu a smysl, původní výraz byl pro tuto hodnotu definován. Navíc jsme zapomněli na definiční obor výrazu. Tedy k výsledku ještě patří: $a \geq 0$ a pro $a = \frac{9}{2}$ dostaneme $\frac{2\cdot\frac{9}{2}}{3+\sqrt{2\frac{9}{2}}} = \frac{3}{2}$.

(b) Výraz nejprve upravíme:

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

Stejně jako u první části příkladu použijeme vzorec $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$ a výraz postupně rozšíříme výrazy $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ a $\sqrt{2}-1$. Dostáváme

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+1)(2-3)} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{6}-2-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-1} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

Výsledek: $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ nebo $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$.

(c) Tentokrát je ve jmenovateli zlomku druhá i třetí odmocnina. Budeme tedy rozšiřovat zlomek dvakrát – abychom odstranili druhou, a potom i třetí odmocninu. Nejdříve použijeme vzorec $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, kde $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt[3]{3}$, pak $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$, kde $x = 2$ a $y = \sqrt[3]{9}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}} . \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{9}} . \frac{4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81}}{4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})(4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81})}{8-9} =$$
$$= (\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81})$$

Výsledek: $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3})$

Příklad 2

Najděte několik aproximací čísel (a) $\sqrt{2}$, (b) $\sqrt[3]{2}$ čísly racionálními.

Řešení

(a) Při hledání aproximací druhé odmocniny nějakého čísla použijeme tento „trik“: uvědomíme si, že výraz $\sqrt{2}-1$ je menší než 1, tedy $(\sqrt{2}-1)^n$ se s rostoucím n bude stále více blížit k nule.
Tedy $(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \doteq 0 \Rightarrow \sqrt{2} \doteq \frac{3}{2} = 1,5$ Na kalkulačce zjistíme, že $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$. Tedy $\sqrt{2} \doteq 1,5$ není příliš pěkná aproximace, protože chyba je $\Delta \doteq 0,086$. Zkusíme proto větší n. Výsledky uspořádáme do tabulky.

n	$(\sqrt{2}-1)^n$	$\sqrt{2} \doteq$	$\Delta=$
3	$5\sqrt{2}-7$	$\frac{7}{5} = 1,4$	0,0142136...
4	$17-12\sqrt{2}$	$\frac{17}{12} = 1,41\overline{6}$	0,0024531...
5	$29\sqrt{2}-41$	$\frac{41}{29} \doteq 1,413793$	0,0004205...
6	$99-70\sqrt{2}$	$\frac{99}{70} \doteq 1,414286$	0,0000722...

(b) Opět využijeme podobného faktu jako u (a), tj. $\sqrt[3]{2}-1 < 0,5$. Výraz nalevo umocníme:
$$(\sqrt[3]{2}-1)^2 = \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 1$$
Na pravé straně máme opět třetí odmocninu. Mocníme výraz dále:
$$(\sqrt[3]{2}-1)^3 = -3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 1$$

Nyní si všimneme, že při vhodné kombinaci obou výrazů jednu třetí odmocninu odstraníme. První vztah vynásobíme číslem 3 a přičteme ke druhému vztahu. Dostaneme
$$3(\sqrt[3]{2}-1)^2 + (\sqrt[3]{2}-1)^3 = 4 - 3\sqrt[3]{2}.$$

Jestliže teď uvážíme, že čísla $(\sqrt[3]{2}-1)^2$ i $(\sqrt[3]{2}-1)^3$ jsou hodně malá, můžeme levou stranu položit rovnu nule a ze získaného vztahu $0 \doteq 4 - 3\sqrt[3]{2}$ určit $\sqrt[3]{2} \doteq \frac{4}{3}$. Chyba, které jsme se dopustili, je $\Delta \doteq |\sqrt[3]{2} - \frac{4}{3}| \doteq 0{,}0734$.

Když stejnou úvahu uděláme s mocninami 3 a 4, dostaneme $(\sqrt[3]{2}-1)^4 + 2(\sqrt[3]{2}-1)^3 = 4\sqrt[3]{2} - 5$. Odtud $\sqrt[3]{2} \doteq \frac{5}{4}$. V tomto případě je chyba $\Delta = |\sqrt[3]{2} - \frac{5}{4}| \doteq 0{,}01$.

Takto bychom mohli postupovat dále a postupně bychom získali další lepší aproximace. Některé další výsledky uvádíme v tabulce.

$\sqrt[3]{2} \doteq$	$\Delta =$
$\frac{29}{23} \doteq 1,260869$	0,0009485...
$\frac{223}{177} \doteq 1,259887$	0,0000340...
$\frac{286}{227} \doteq 1,259912$	0,0000092...

Příklad 3

Představte si, že máte kalkulačku, která „umí“ základní početní operace, ale „neumí“ druhou odmocninu. Zjistěte, který z výrazů je větší:
(a) $\sqrt{80}-1$, nebo $\sqrt{81-8\sqrt{5}}$, (b) $\sqrt{160}-13$, nebo $\sqrt{81-8\sqrt{5}}$.

Řešení

(a) Protože nemůžeme vypočítat druhé odmocniny na kalkulačce, musíme je odstranit pomocí umocňování. Dále budeme pomocí ekvivalentních úprav upravovat obě strany nerovnosti tak dlouho, až budeme umět s jistotou rozhodnout, který výraz je větší, zda $\sqrt{80}-1$, nebo $\sqrt{81-8\sqrt{5}}$. Rozhodování budeme značit symbolem $\diamond$. Tedy ptáme se:

$$\sqrt{80}-1 \diamond \sqrt{81-8\sqrt{5}}$$

Oba výrazy umocníme a dostaneme

$$80-2\sqrt{80}+1 \diamond 81-8\sqrt{5}.$$

Zjednodušíme:

$$-2\sqrt{80} \diamond -8\sqrt{5}$$

Poznámka: Pozor na umocňování záporných čísel. Pokud umocníme na druhou $-3<-2$, dostaneme $9<4$.

Odstraníme tedy nejdříve záporná čísla. Mohli bychom vynásobit nerovnost číslem $-\frac{1}{2}$, ale pak bychom si museli pamatovat, že se nerovnost obrátí. Lépe bude, když převedeme čísla na druhou stranu. Dostaneme

$$8\sqrt{5} \diamond 2\sqrt{80}$$

a dále

$$8\sqrt{5} \diamond 8\sqrt{5}.$$

Oba výrazy jsou si rovny.

Výsledek: $\sqrt{80}-1=\sqrt{81-8\sqrt{5}}$

(b) Budeme postupovat stejně jako u (a):

$$\sqrt{160}-13 \diamond \sqrt{81-8\sqrt{5}}$$

Umocníme:

$$\begin{aligned} 160-26\sqrt{160}+169 &\diamond 81-8\sqrt{5} \\ 31-13\sqrt{10} &\diamond -\sqrt{5} \\ \sqrt{5}+31 &\diamond 13\sqrt{10} \\ 5+62\sqrt{5}+961 &\diamond 1\,690 \\ 62\sqrt{5} &\diamond 724 \\ 31\sqrt{5} &\diamond 362 \\ 4\,805 &< 131\,044 \end{aligned}$$

Výsledek: $\sqrt{160}-13<\sqrt{81-8\sqrt{5}}$

Dopustili jsme se závažné chyby, přestože je výsledek správný. Umocňovali jsme výraz, který byl menší než 0. Jedná se o výraz $\sqrt{160} - 13$. I bez kalkulačky víme, že $13^2 = 169$, tedy $\sqrt{160} - 13 < 0$. Na výsledku se naše chyba náhodou neprojevila. Porovnejte následující dva výpočty: máme-li $-2 < 1$, po umocnění obou čísel dostaneme opačnou nerovnost $4 > 1$, ale máme-li $-2 < 5$, po umocnění zůstává nerovnost stejná $4 < 25$. Nerovnost se nezměnila, a právě to způsobilo, že nám i navzdory oné chybě vyšel správný výsledek.

Příklad 4

$\boxed{\text{Zjednodušte výraz } V = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.}$

Řešení

Protože se nejedná o rovnici, nemůžeme odstranit odmocninu pouhým umocněním. Využijeme tedy substituce

$$\sqrt{x-1} = y. \tag{1.1}$$

Omezíme se na případy $x \geq 1$. Jinak by výraz na levé straně neměl smysl. Současně $\sqrt{x-1} \geq 0$, tedy $y \geq 0$.
Z (1.1) vyjádříme x: $x = y^2 + 1$
Substituci použijeme v původním výrazu:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \\ &= \sqrt{y^2 + 1 + 2y} - \sqrt{y^2 + 1 - 2y} = \\ &= \sqrt{(y+1)^2} - \sqrt{(y-1)^2} = y + 1 - (y-1) = 2 \end{aligned}$$

<u>Výsledek</u>: $V = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$ pro $x \geq 1$.

Udělali jsme chybu, která se často opakuje. Předpokládali jsme, že $\sqrt{(y-1)^2} = y - 1$. To ovšem nemusí být pravda. Nechť např. $x = \frac{5}{4}$, tj. $y = \frac{1}{2}$, pak má výraz V hodnotu 1 a ne 2, jak tvrdí výsledek.
Správné řešení je:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{(y+1)^2} - \sqrt{(y-1)^2} = \\ &= |y+1| - |y-1| = \\ &= |\sqrt{x-1} + 1| - |\sqrt{x-1} - 1| \end{aligned}$$

Nyní je třeba diskutovat y a x:
1. $y \in \langle 0, 1\rangle$, tedy $x \in \langle 1, 2\rangle$, pak $y + 1 + y - 1 = 2y = 2\sqrt{x-1}$;
2. $y \in \langle 1, \infty)$, tedy $x \in \langle 2, \infty)$, pak $y + 1 - y + 1 = 2$.

Příklad 5

$\boxed{\text{Vyjádřete } \cos 15^\circ \text{ pomocí číselného výrazu s odmocninami.}}$

Řešení I

Protože $\cos 15^\circ = \cos(\frac{30}{2})^\circ$, můžeme použít vzorce $|\cos\frac{\alpha}{2}| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$. Protože $\cos 15^\circ$ je kladné číslo, můžeme vynechat absolutní hodnotu.
Tedy

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Výsledek: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Řešení II

Číslo $\cos 15^\circ$ můžeme vyjádřit také jako $\cos(45^\circ - 30^\circ)$ a použít vzorce
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.
Tedy

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Výsledek: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Poznámka: Došli jsme k zajímavému závěru $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. Na levé straně rovnosti je stupňovitá odmocnina, na pravé ne. Dokážeme říci obecně, kdy lze stupňovitou odmocninu odstranit a kdy ne? To řeší následující příklad.

Příklad 6

Zjistěte, pro která a, $b \in \mathbf{N}$ existují c, $d \in \mathbf{Q}$ tak, že výraz $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, kde $a \geq \sqrt{b}$, můžeme psát ve tvaru $\sqrt{c} \pm \sqrt{d}$.

Řešení

Chceme, aby $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{c} \pm \sqrt{d}$. Rovnost upravíme:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a \pm \sqrt{b}} &= \sqrt{c} \pm \sqrt{d} \\
a \pm \sqrt{b} &= c \pm 2\sqrt{cd} + d \\
a \pm \sqrt{b} &= (c+d) \pm \sqrt{4cd}
\end{aligned}$$

Tedy $a = c + d$ a $b = 4cd$.

Dále vyjádříme c, d pomocí a, b:

$$\begin{aligned}
c &= a - d \\
b &= 4(a - d)d \\
b &= 4ad - 4d^2
\end{aligned}$$

Z posledního vztahu dostáváme kvadratickou rovnici pro d: $d^2 - ad + \frac{b}{4} = 0$. Po vyřešení dostaneme dva výsledky

$$d_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}, \quad d_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}, \quad \text{kde} \quad a^2 \geq b.$$

Dopočítáme c_1 a c_2:

$$c_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}, \quad c_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

Podle zadání chceme, aby čísla c, d byla racionální a a, b přirozená. Protože číslo $\sqrt{a^2-b}$ je buď přirozené, nebo iracionální, je nutně $\sqrt{a^2-b}\in\mathbf{N}$.

Výsledek: Pro $\sqrt{a^2-b}=t\in\mathbf{N}$ je

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+t)}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-t)}.$$

Úlohy

1. Odstraňte odmocninu ze jmenovatele

(a) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}+1}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{2}-1}$, (c) $\frac{4}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$, (d) $\frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, (e) $\frac{23}{3-\sqrt[3]{4}}$.

2. Najděte několik racionálních aproximací čísel $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$.

3. Bez použití kalkulačky porovnejte čísla x, y, kde $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{8-\sqrt{5}}$, $y=\sqrt{3+\sqrt{7}}-\sqrt{8-\sqrt{7}}$.

4. Bez použití kalkulačky porovnejte čísla x, y, kde

(a) $x=\sqrt{19}$, $y=\sqrt[3]{84}$, (b) $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $y=\sqrt{9,9}$,
(c) $x=\sqrt{1\,000\,003-\sqrt{3}}-\sqrt{1\,000\,000+\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{1\,000\,003-\sqrt{2}}-\sqrt{1\,000\,000+\sqrt{2}}$.

5. Zjednodušte výraz (a) $\left[\frac{a^5b^{-4}}{c^{-3}d^2}\right]^{-3}:\left[\frac{a^{-2}b^{-3}}{c^4d^{-5}}\right]^{-2}$, (b) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$,

(c) $\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2$.

6. Zjednodušte výraz
$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right):\frac{x+y}{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\frac{2y}{x-y}.$$

7. Vypočtěte (a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

8. Zjistěte, čemu se rovná výraz $a^{-1}(1+\frac{1}{a^2})^{-\frac{1}{2}}(1+a^2)^{\frac{1}{2}}$, jestliže $a\neq 0$ je libovolné reálné číslo.

9. Nechť a, $a\neq 0$, je reálné číslo a n, $n\geq 2$, je číslo celé. Pro které číslo a platí
$$\frac{(a^n+a^{n-1})^2}{a^{2n-1}}=a+1?$$

Výsledky

1. (a) $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{4}$, (b) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}{4}$, (c) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$, (d) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, (e) $9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}$.
2. $\sqrt{3}=\frac{7}{4},\frac{19}{11},\frac{71}{41},\ldots$ $\sqrt{5}=\frac{29}{13},\frac{123}{55},\frac{521}{233},\ldots$ (u $\sqrt{5}$ musíme již umocňovat výraz $\sqrt{5}-2$)
$\sqrt{6}=\frac{49}{20},\frac{485}{198},\frac{4801}{1960},\ldots$ $\sqrt[3]{5}=\frac{53}{31},\frac{171}{100},\frac{566}{331},\ldots$ $\sqrt[3]{7}=\frac{44}{23},\ldots$
3. $x<y$

4. (a) $x < y$, (b) $x < y$, (c) $y > x$, (rada: než začnete porovnávat, zjistěte, zda není některé z čísel záporné).
5. (a) $\frac{d^{16}b^6}{a^{19}c^{17}}$, kde $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$, (b) $2\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$, kde $a \neq \pm b$ (c) $2x - 2|x-2|$ pro $x \in \langle 1, \infty)$.
6. 2, pro $x > 0$, $y > 0$, $x \neq \pm y$.
7. (Pro $n \geq 1$ platí $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.) (a) 1, (b) 9.
8. 1 pro $a > 0$, -1 pro $a < 0$.
9. $a = -1$

1.2 Důkazové úlohy

Příklad 7

Bez použití kalkulačky dokažte, že platí $5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$.

Řešení I

Podobné úlohy se obvykle řeší tak, že vyjdeme z nerovnosti, o které se můžeme poměrně snadno přesvědčit i bez kalkulačky, že opravdu platí. V našem případě použijeme nerovnost

$$5^3 + 6^3 < 7^3 \qquad (5^3 = 125, 6^3 = 216, 7^3 = 343).$$

Upravíme ji na tvar

$$??? \tag{1.2}$$

Dále víme, že $\frac{5}{7} < 1$ a $\frac{6}{7} < 1$. Budeme-li umocňovat číslo menší než 1 na čím větší mocninu, tím menší číslo dostaneme. Tedy určitě platí

$$??? \tag{1.3}$$

Nyní použijeme oba vztahy (1.2), (1.3) a dostaneme
???

$$5^{10} + 6^{10} < 7^{10}.$$

Nerovnost je tímto dokázána.

Řešení II

Příklad můžeme řešit také pomocí binomické věty:
$7^{10} = (6+1)^{10} = 6^{10} + 10 \cdot 6^9 + \cdots > 6^{10} + 10 \cdot 6^9 > 6^{10} + 5^{10}$.

Příklad 8

> Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí $2^{100}(a^{100}+b^{100}) > (a+b)^{100}$.

Řešení

Protože čísla a, b vystupují symetricky, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \geq b$. Jako u předchozího příkladu vyjdeme z nerovnosti, o které víme, že platí.

Když $a \geq b$, pak určitě platí nerovnost $2a \geq a + b > 0$. Umocníme na 100

$$(2a)^{100} \geq (a+b)^{100}$$

a upravíme

$$2^{100}a^{100} \geq (a+b)^{100}.$$

Porovnáme-li poslední nerovnost s nerovností v zadání, vidíme, že na levé straně chybí ještě $2^{100}b^{100}$. Pokud tento výraz k levé straně přičteme, nerovnost se pouze změní na ostrou, jinak zůstane zachována:

$$2^{100}a^{100} + 2^{100}b^{100} > (a+b)^{100}$$

$$2^{100}(a^{100} + b^{100}) > (a+b)^{100}$$

Nerovnost je tímto dokázána.

Příklad 9

> Nechť a, b, c, x jsou reálná čísla, pro která platí $ax^3 + 2bx + c = 0$. Dokažte, že pak platí $acx \leq b^2$.

Řešení

Vynásobíme danou rovnost výrazem ax (abychom dostali na levé straně výraz acx, který se vyskytuje v dokazované nerovnosti):

$$a^2x^4 + 2abx^2 + acx = 0$$

Přičteme b^2:

$$a^2x^4 + 2abx^2 + acx + b^2 = b^2$$

Upravíme levou stranu a obě strany prohodíme:

$$b^2 = (ax^2 + b)^2 + acx$$

Odtud

$$b^2 - acx = (ax^2 + b)^2 \geq 0.$$

Tedy $b^2 - acx \geq 0$ a $b^2 \geq acx$. Nerovnost je tímto dokázána.

Úlohy

1. Dokažte, že pro $x \geq -1$ je $(x+4)^2 \geq 16\sqrt{x+1}$.
2. Dokažte rovnost $\sin\gamma = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$, jestliže $\alpha \neq \beta$ a α, β, γ jsou úhly v trojúhelníku.
3. Dokažte, že v trojúhelníku s úhly α, β, γ, kde žádný z úhlů není pravý, platí $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma$.
4. Bez kalkulačky dokažte, že platí nerovnost (a) $10^9 + 11^9 < 15^9$, (b) $10^9 + 11^9 < 12^9$.
5. Nechť x, y, z jsou reálná čísla, pro která platí $x+y+z=0$, $xyz \neq 0$. Dokažte, že pak
$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy} = 3.$$
6. Nechť reálné číslo y je aritmetickým průměrem čísel x, z. Dokažte, že pak číslo (x^2+xz+z^2) je aritmetickým průměrem čísel (x^2+xy+y^2) a (y^2+yz+z^2).

Výsledky

1. Umocníme nerovnost na druhou a dalšími ekvivalentními úpravami dostaneme nerovnost $x^2[(x+8)^2+32] \geq 0$, která určitě platí.
2. Vyjdeme z pravé strany rovnosti a použijeme vzorce: $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ a $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.
3. Využijeme toho, že $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, tedy $\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=0$. Protože $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, je $\beta+\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ a můžeme použít vzorec $\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}$, kde $x=\alpha$ a $y=\beta+\gamma$.
4. (a) Využijeme nerovnosti $10^2+11^2<15^2$, o které se můžeme přesvědčit i bez kalkulačky, že platí. (b) $12^9 = (11+1)^9 = 11^9 + 9\cdot 11^8 + \cdots > 11^9 + 9\cdot 11^8$. Stačí, když ukážeme, že $9\cdot 11^8 > 10^9$, tj. $(\frac{11}{10})^8 > \frac{10}{9} = 1{,}\overline{1}$, ale $(\frac{11}{10})^8 > (\frac{11}{10})^2 = 1{,}21 > 1{,}\overline{1}$. Tím je důkaz ukončen.
5. Vyjdeme ze vztahu $x+y+z=0$, tedy $x+y=-z$, a úpravami dostaneme dokazovanou rovnost.
6. Stačí použít definici aritmetického průměru.

1.3 Geometrické vztahy popsané algebraicky

Příklad 10

Bez stupňovité odmocniny vyjádřete délku úhlopříček u_1 a u_2 kosočtverce pomocí délky jeho strany a a výšky v (viz obrázek 1.1).

Řešení

Z obrázku ihned vidíme, že podle Pythagorovy věty platí

Obrázek 1.1:

$$a^2 = \frac{u_1^2}{4} + \frac{u_2^2}{4}.$$

Rovnost upravíme na tvar

$$4a^2 = u_1^2 + u_2^2. \tag{1.4}$$

Obsah rovnoramenného trojúhelníka ABD vyjádříme dvěma způsoby a dáme do rovnosti:

$$S = \frac{av}{2} \quad \text{a} \quad S = \frac{u_2 \cdot \frac{u_1}{2}}{2}.$$

Tedy

$$\frac{av}{2} = \frac{u_1 u_2}{4}.$$

Dále upravíme na tvar

$$4av = 2u_1 u_2. \tag{1.5}$$

Nyní budeme pracovat s rovnicemi (1.4) a (1.5). Nejdříve je odečteme a pak sečteme. Tím dostaneme dva vztahy pro u_1 a u_2 pomocí a a v.

- Po sečtení dostaneme

$$4av + 4a^2 = u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2.$$

Tedy

$$4av + 4a^2 = (u_1 + u_2)^2,$$

$$u_1 + u_2 = 2\sqrt{av + a^2}. \tag{1.6}$$

- Po odečtení dostaneme

$$4a^2 - 4av = u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2.$$

Tedy

$$4a^2 - 4av = (u_1 - u_2)^2,$$

$$u_1 - u_2 = 2\sqrt{-av + a^2}. \tag{1.7}$$

Rovnice (1.6) a (1.7) sečteme (tím odstraníme u_2 a zůstane u_1). Dostáváme

$$2u_1 = 2\left(\sqrt{a(a-v)} + \sqrt{a(a+v)}\right),$$

$$u_1 = \sqrt{a}\left(\sqrt{a-v} + \sqrt{a+v}\right).$$

Rovnice (1.6) a (1.7) odečteme (tím odstraníme u_1 a zůstane u_2). Dostáváme

$$2u_2 = 2\left(\sqrt{a(a+v)} - \sqrt{a(a-v)}\right),$$

$$u_2 = \sqrt{a}\left(\sqrt{a+v} - \sqrt{a-v}\right).$$

Výsledek: $u_1 = \sqrt{a}(\sqrt{a-v} + \sqrt{a+v})$, $u_2 = \sqrt{a}(\sqrt{a+v} - \sqrt{a-v})$.

Příklad 11

Jsou dány délky stran a, b, c ostroúhlého trojúhelníka ABC. Vyjádřete výšku $v_a = |AD|$ pomocí a, b, c (viz obrázek 1.2).

Řešení

Pro jednoduchost označme $v_a = v$.
Pomocí Pythagorovy věty vyjádříme $x = \sqrt{c^2 - v^2}$ a $y = \sqrt{b^2 - v^2}$.

Obrázek 1.2:

Víme, že $x + y = a$, tedy

$$\sqrt{c^2 - v^2} + \sqrt{b^2 - v^2} = a. \tag{1.8}$$

Tento vztah dále upravujeme:

$$\begin{aligned}
\sqrt{c^2 - v^2} &= a - \sqrt{b^2 - v^2} \\
c^2 - v^2 &= a^2 - 2a\sqrt{b^2 - v^2} + b^2 - v^2 \\
2a\sqrt{b^2 - v^2} &= a^2 + b^2 - c^2 \\
4a^2(b^2 - v^2) &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\
4a^2b^2 - 4a^2v^2 &= (a^2 + b^2 - c^2)^2
\end{aligned}$$

Nyní je nutné odstranit nepříjemnou druhou mocninu. Převedeme tedy výraz $(a^2 + b^2 - c^2)^2$ na druhou stranu, což nám umožní použít vzorec $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$:

$$\begin{aligned}
4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 &= 4a^2v^2 \\
(2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) &= 4a^2v^2 \\
(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2) &= 4a^2v^2
\end{aligned}$$

Opět použijeme vzorec $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$:

$$(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c) = 4a^2v^2$$

Pro zjednodušení zápisu označme $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
2(p - a)2(p - b)2(p - c)2p &= 4a^2v^2, \\
4p(p - a)(p - b)(p - c) &= a^2v^2, \\
av &= 2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.
\end{aligned}$$

<u>Výsledek:</u>

$$v_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}, \quad \text{kde} \quad p = \frac{1}{2}(a + b + c). \tag{1.9}$$

Úlohy

1. Jsou dány délky stran a, b, c trojúhelníka ABC. Zjistěte jeho obsah $S = |ABC|$.
2. Dokažte, že vztah (1.9) platí i pro (a) tupoúhlý, (b) pravoúhlý trojúhelník.

3. Jsou dány délky stran a, b, c trojúhelníka ABC. Najděte poloměr kružnice (a) vepsané ϱ, (b) opsané r za předpokladu, že znáte jen Heronův vzorec a vztah $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ a žádný vztah mezi ϱ a obsahem trojúhelníka.

4. Vyjádřete v_a (vztah (1.9)) pouze pomocí a, b, c a zjednodušte ho.

5. Jsou dány délky stran a, b, c trojúhelníka ABC. Pomocí a, b, c vyjádřete (a) číslo $d = |DE|$, kde D je pata výšky na stranu a a E pata těžnice na a, (b) t_a.

6. Máme dán čtverec, který je popsán podle obrázku 1.3 (E je obsah trojúhelníka o stranách a, c, d, F je obsah lichoběžníka o stranách d, c, c, b, G je obsah čtverce o straně c).

Obrázek 1.3:

V následujících úlohách budou dány vždy dva údaje z údajů a, b, c, d, E, F, G a naším úkolem bude vyjádřit všechny ostatní údaje pomocí těchto dvou. Tedy je dáno

(a)	$a, c,$	(b)	$a, b,$	(c)	$a, d,$	(d)	$a, E,$	(e)	$a, F,$	(f)	$a, G,$
(g)	$b, c,$	(h)	$b, d,$	(i)	$b, E,$	(j)	$b, F,$	(k)	$b, G,$	(l)	$c, d,$
(m)	$c, E,$	(n)	$c, F,$	(o)	$c, G,$	(p)	$d, E,$	(q)	$d, F,$	(r)	$d, G,$
(s)	$E, F,$	(t)	$E, G,$	(u)	$F, G.$						

Výsledky

1. Podle příkladu 11 je $S = \frac{1}{2}av_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

U příkladu 11 byl uvažován pouze ostroúhlý trojúhelník, ale zde je trojúhelník libovolný. V případě, že bod D neleží na úsečce BC, není pravdivý vztah $x + y = a$, z něhož jsme vycházeli.

<u>Nové řešení:</u> Vztah (1.9) je platný i pro tupoúhlý (pravoúhlý) trojúhelník, jestliže a je nejdelší strana. Pak vztah (1.8) zůstává pravdivý, neboť zde bod D leží uvnitř strany BC.

2. Protože vztah $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (je to tzv. Heronův vzorec) a $S = \frac{1}{2}av_a$ platí pro všechny trojúhelníky, platí i (1.9) pro libovolný trojúhelník.

3. (a) $\varrho = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$, kde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. (b) Ze sinové věty máme $\frac{c}{\sin\gamma} = 2r$. Dále $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{abc}{4r}$. Odtud a z Heronova vzorce dostaneme $r = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, kde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

4. $v_a = \frac{1}{2a}\sqrt{2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$

5. (a) Stačí použít Pythagorovu větu na pravoúhlé trojúhelníky BDA a DAC. Výsledek: $d = \frac{|c^2-b^2|}{2a}$. (b) V libovolném trojúhelníku platí $t_a^2 = v_a^2 + d^2$. Dále použijeme vztah nalezený v (a) a v úloze 4. Výsledek: $t_a = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$.

6. Výsledek vyjádříme v tabulce 1.1.

(a)	a, c	$b = c - a$, $d = \sqrt{a^2 + c^2}$, $E = \frac{1}{2}ac$, $F = \frac{1}{2}c(2c - a)$, $G = c^2$,
(b)	a, b	$c = a + b$, ostatní údaje dostaneme po dosazení do (a) za c,
(c)	a, d	$c = \sqrt{d^2 - a^2}$, dosadíme do (a) za c,
(d)	a, E	$c = \frac{2E}{a}$, dále dosadíme do (a) za c,
(e)	a, F	$c = \frac{1}{4}(a + \sqrt{a^2 + 16F})$, dosadíme do (a) za c,
(f)	a, G	$c = \sqrt{G}$, dosadíme do (a) za c,
(g)	b, c	$a = c - b$, dosadíme do (a) za a,
(h)	b, d	$c = \frac{1}{2}(b + \sqrt{2d^2 - b^2})$, dosadíme do (g) za c,
(i)	b, E	$a = \frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + 8E} - b)$, dosadíme do (b) za a,
(j)	b, F	$a = \frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + 8F} - 3b)$, dosadíme do (b) za a,
(k)	b, G	$a = \sqrt{G} - b$, dosadíme do (b) za a,
(l)	c, d	$a = \sqrt{d^2 - c^2}$, dosadíme do (a) za a,
(m)	c, E	$a = \frac{2E}{c}$, dosadíme do (a) za a,
(n)	c, F	$a = \frac{2(c^2 - F)}{c}$, dosadíme do (a) za a,
(o)	c, G	prvky jsou závislé,
(p)	d, E	$a = \sqrt{\frac{d^2 - \sqrt{d^4 - 16E^2}}{2}}$, dosadíme do (c) za a,
(q)	d, F	$a = \sqrt{\frac{1}{10}(9d^2 - 8F - \sqrt{d^4 + 16Fd^2 - 16F^2})}$, dosadíme do (c) za a,
(r)	d, G	$c = \sqrt{G}$, dosadíme do (l) za c,
(s)	E, F	$a = \frac{2E}{\sqrt{E+F}}$, $c = \sqrt{E + F}$, dosadíme do (a) za a a c,
(t)	E, G	$c = \sqrt{G}$, $a = \frac{2E}{\sqrt{G}}$, dosadíme do (a) za a a c,
(u)	F, G	$c = \sqrt{G}$, $a = \frac{2(G-F)}{\sqrt{G}}$, dosadíme do (a) za a a c.

Tabulka 1.1:

1.4 Parciální zlomky

Máme-li v rukou přenést z místa na místo 30 cihel, nebudeme je přenášet najednou, ale po částech. Podobně, když máme bez kalkulačky sčítat 9 pětimístných čísel, rozdělíme si čísla na, řekněme, tři skupiny po třech a každou skupinu sečteme zvlášť a pak sečteme dílčí výsledky. Metodu rozložení složitého úkolu na jednodušší používáme často zcela automaticky. Někdy je tato metoda základem řešení složitých matematických úloh.
Například starověké kultury neznali zlomek v našem slova smyslu. Znali pouze kmenové zlomky. To jsou zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, kde n je přirozené číslo. Zlomky složitější pak rozkládali na součet několika kmenových zlomků. Ahmesův papyrus, napsaný kolem roku 2000 před Kristem, uvádí návody na dělení založené na takových rozkladech. Například 7 chlebů se dělilo mezi 8 lidí podle pravidla $\frac{7}{8} = 1 + 1 + \frac{1}{8}$ takto: čtyři chleby se rozpůlily, dva se rozčtvrtily a jeden se rozdělil na 8 stejných dílů. Každý z osmi podílníků pak dostal jednu polovinu, jednu čtvrtinu a jednu osminu. Uvedené tabulky písaře Ahmese obsahují mnohé podobné, někdy dosti složité, vztahy: $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$, nebo $\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$.
Podobný postup rozkladu používáme při integrování lomené racionální funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ i $Q(x)$ jsou polynomy. S úplnou teorií takého integrování se seznámíte později v rámci matematické analýzy. Zde se omezíme na nabytí prvních zkušeností s důležitou procedurou rozkladu zlomku na parciální (částečné) zlomky. V závěru odstavce uvedeme vymezení pojmu parciální zlomek a větu o rozkladu lomené racionální funkce na parciální zlomky

Příklad 12

> Vyjádřete výraz $\frac{3x+5}{(x+3)(x-1)}$ jako součet parciálních zlomků.

Řešení

Při rozkladu na parciální zlomky je důležitý jmenovatel racionálního výrazu. V tomto případě se ve jmenovateli nachází pouze součin dvou lineárních výrazů. Ze zkušenosti se sčítáním zlomků víme, že hledaný rozklad bude mít asi tvar

$$\frac{3x+5}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1},$$

kde čísla A a B musíme zjistit. Rovnost budeme upravovat. Nejdříve se zbavíme zlomků a pak dáme k sobě výrazy s neznámou x:

$$\begin{aligned} 3x+5 &= A\ (x-1) + B(x+3) \\ 3x+5 &= x(A\ + B) + (3B - A) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ve vztahu (1.10) porovnáme koeficienty u x a absolutní člen. Poslední vztah platí pro všechna $x \in \mathbf{R}$ kromě $x = 1$, $x = -3$. Platí tedy pro $x = 0$. Odtud máme $5 = 3B - A$. Pak ale lze původní vztah zjednodušit na tvar $3x = x(A + B)$. Odtud $3 = A + B$. Tak jsme z funkčního vztahu (1.10) odvodili dva číselné vztahy $A + B = 3$, $3B - A = 5$. Soustavu vyřešíme a dostaneme $A = 1$, $B = 2$.

Výsledek: $\frac{3x+5}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$

Příklad 13

> Vyjádřete výraz $\frac{5x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ jako součet parciálních zlomků.

Řešení

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu:

$$\frac{5x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x^2+1},$$

odkud $5x^2-2x-1=Ax^2+Bx+(A+B)$. Porovnáním koeficientů u x^2, x a absolutních členů dostaneme soustavu tří rovnic o dvou neznámých: $5=A$, $-2=B$, $-1=A+B$.

Tato soustava nemá řešení. Příčinu vidíme – máme málo neurčitých koeficientů. Musíme aspoň jeden někam přidat. Kam? Zřejmě někam do druhého zlomku, protože v jeho jmenovateli je x^2. Udělejme tedy pokus najít A tak, aby po odečtení zlomku $\frac{A}{x+1}$ od levé strany zůstal zlomek se jmenovatelem x^2+1. Tedy

$$\frac{5x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}-\frac{A}{x+1}=\frac{5x^2-2x-1-Ax^2-A}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{(5-A)x^2-2x-(A+1)}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Číslo A musíme volit tak, aby v čitateli byl součin dvou výrazů, z nichž jeden je $(x+1)$, tedy aby $x=-1$ byl kořen rovnice $(5-A)x^2-2x-(A+1)=0$. Po dosazení $x=-1$ máme $5-A+2-A-1=0$, odkud $A=3$. Pak bude čitatel mít tvar $2x^2-2x-4=2(x+1)(x-2)$ a celý zlomek má tvar

$$\frac{2(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{2x-4}{x^2+1}.$$

Našli jsme nejen hledaný rozklad

$$\frac{5x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{x+1}+\frac{2x-4}{x^2+1},$$

ale i metodu, jak v budoucnu postupovat rychleji. Je-li v rozkladovém zlomku ve jmenovateli lineární polynom, bude v čitateli konstanta. Je-li ve jmenovateli nerozložitelný kvadratický polynom, bude v čitateli lineární polynom.

Výsledek: $\frac{5x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{x+1}+\frac{2x-4}{x^2+1}$

Příklad 14

Vyjádřete výraz $\frac{x+4}{(x+1)(x-2)^2}$ jako součet parciálních zlomků.

Řešení

Poučeni předchozím případem, hledáme rozklad ve tvaru

$$\frac{x+4}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x-2)^2}.$$

Po úpravě dostáváme
$x+4=A(x-2)^2+(Bx+C)(x+1)=x^2(A+B)+x(-4A+B+C)+(4A+C)$.
Porovnáním koeficientů u x^2, x, x^0 získáme soustavu rovnic $A+B=0$, $-4A+B+C=1$, $4A+C=4$ s řešením $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{8}{3}$.
Hledaný rozklad má tvar $\frac{x+4}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-8}{3(x-2)^2}$.

Poslední zlomek rozkladu lze ještě dále rozložit tak, že v čitateli nebude proměnná x: $\frac{x-8}{3(x-2)^2}=\frac{(x-2)-6}{3(x-2)^2}=\frac{1}{3(x-2)}-\frac{2}{(x-2)^2}$.

Výsledek: $\frac{x+4}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{3(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}$.

Závěr: Parciálním zlomkem nazveme každý zlomek těchto dvou typů: $\frac{A}{(x-B)^n}$, $\frac{Cx+D}{(Ex^2+Fx+G)^n}$, kde n je přirozené číslo a A, B, C, D, E, F, $G \in \mathbf{R}$ jsou libovolná čísla, přičemž $E \neq 0$ a rovnice $Ex^2 + Fx + G = 0$ nemá reálné kořeny.

V algebře se dokazuje silná věta, která hraje důležitou roli v integrálním kalkulu.

Věta o rozkladu racionální lomené funkce: Nechť $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Pak funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se dá napsat jako součet polynomu a konečného počtu parciálních zlomků.

Věta tvrdí, že uvedený rozklad existuje, ale netvrdí, že jej vždy umíme najít. To závisí na tom, zda umíme rozložit polynom $Q(x)$ na lineární a kvadratické faktory. Například polynom, jehož stupeň je větší než 4, umíme rozložit jen výjimečně.

Úlohy

Vyjádřete výraz jako součet parciálních zlomků:

(a) $\frac{x^3}{(x+4)(x-1)}$, (b) $\frac{x+11}{x^2-2x-15}$, (c) $\frac{x^2+2x+7}{x(x-1)^2}$, (d) $\frac{3x+16}{(x-2)(x^2+7)}$,
(e) $\frac{4x^3+5x^2+7x-1}{(x^2+x+1)^2}$, (f) $\frac{x^3-4x^2-19x-35}{x^2-7x}$, (g) $\frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$, (h) $\frac{-x^4-4x^2+3x-6}{x^4(x-2)}$,
(i) $\frac{2x^2+3x-1}{x^3-1}$, (j) $\frac{x^3+2x}{(x^2+1)^2}$.

Výsledky

(a) Pozor, jedná se o neryze lomenou racionální fuknci, ve které je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele. V našem případě je v čitateli výraz stupně 3 a ve jmenovateli stupně 2. Neryze lomenou racionální funkci převedeme na součet polynomické funkce a ryze lomené racionální funkce.
Tedy $\frac{x^3}{(x+4)(x-1)} = x - 3 + \frac{13x-12}{(x+4)(x-1)} = x - 3 + \frac{64}{5(x+4)} + \frac{1}{5(x-1)}$, (b) $\frac{-1}{x+3} + \frac{2}{x-5}$, (c) $\frac{7}{x} + \frac{-6}{x-1} +$ $+ \frac{10}{(x-1)^2}$, (d) $\frac{2}{x-2} + \frac{-2x-1}{x^2+7}$, (e) $\frac{4x+1}{x^2+x+1} + \frac{2x-2}{(x^2+x+1)^2}$, (f) $x + 3 + \frac{5}{x} + \frac{-3}{x-7}$, (g) $\frac{1}{5(x+2)} + \frac{4}{5(x-3)}$, (h) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \frac{-2}{x-2}$, (i) $\frac{4}{3(x-1)} + \frac{2x+7}{3(x^2+x+1)}$, (j) $\frac{x}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

1.5 Různé úlohy

Příklad 15

Rozhodněte bez použití kalkulačky či počítače, které z čísel je větší:
$b = \frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557}$, $c = \frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}$.

Řešení

Vzhledem k velikosti čísel b a c je nutné použít trik známý např. z matematické olympiády. Vyjádříme si obě čísla co nejjednodušeji pomocí písmen.
Nechť např. $x = 1\,111\,111\,110$, pak $b = \frac{5x+3}{5x+7}$ a $c = \frac{6x+4}{6x+9}$.
Nyní od sebe odečteme oba zlomky a zjistíme, zda je rozdíl větší, či menší než nula, či roven nule. Po úpravě dostaneme

$$b - c = \frac{5x+3}{5x+7} - \frac{6x+4}{6x+9} = \frac{x-1}{(5x+7)(6x+9)}.$$

Uvědomíme-li si, jak velké je číslo x, je jasné, že zlomek $\frac{x-1}{(5x+7)(6x+9)}$ je větší než 0. Tedy $b-c>0$ a zlomek b je větší než zlomek c.

Výsledek: $b>c$

Příklad 16

Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla ???

Řešení I

Příklad budeme nejprve řešit pomocí Moivrovy věty. Nejdříve musíme číslo $z=1-\mathrm{i}$ převést na goniometrický tvar:

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\quad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tedy
$$\varphi = -\frac{\pi}{4} \quad \text{a} \quad z = \sqrt{2}\Big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{4})\Big).$$

Použijeme-li Moivrovu větu, dostaneme
$$z^{16} = (\sqrt{2})^{16}\Big(\cos[16(-\frac{\pi}{4})] + \mathrm{i} \cdot \sin[16(-\frac{\pi}{4})]\Big),$$

$$z^{16} = 2^8\Big(\cos(-4\pi) + \mathrm{i} \cdot \sin(-4\pi)\Big) = 2^8 \cdot 1 = 2^8.$$

Tedy
$$\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right)^{16} = \frac{1}{2^8}.$$

Výsledek: Reálná část je $\frac{1}{2^8}$, imaginární část je 0.

Řešení II

Příklad můžeme řešit také jednoduchým trikem, jehož podstata bude jasná z následujícího řádku:
$\frac{1}{(1-\mathrm{i})^{16}} = \frac{1}{[(1-\mathrm{i})^2]^8} = \frac{1}{(1-2\mathrm{i}-1)^8} = \frac{1}{(-2\mathrm{i})^8} = \frac{1}{(-2)^8\mathrm{i}^8} = \frac{1}{2^8(\mathrm{i}^2)^4} = \frac{1}{2^8(-1)^4} = \frac{1}{2^8}$

Výsledek: Reálná část je $\frac{1}{2^8}$, imaginární část je 0.

Úlohy

1. Najděte reálnou a imaginární část komplexního čísla

   ???

   (b) $(1+\mathrm{i})^{96} + (1-\mathrm{i})^{104}$.

2. Zjistěte, které z čísel x, y je větší

   (a) $x = \frac{278\,000\,007}{751\,000\,007}$, $y = \frac{278\,000\,000}{751\,000\,000}$, (b) $x = \log_{20} 80$, $y = \log_{80} 640$.

Výsledky

1. (a) Reálná část je $-\frac{1}{2^{10}}$, imaginární část je 0, (b) reálná část je $2^{48} \cdot 17$, imaginární část je 0.
2. (a) $x > y$, (b) rada: převeďte nejdříve oba logaritmy na logaritmus o stejném základu; výsledek: $x < y$.

Kapitola 2

Posloupnosti a řady

2.1 Posloupnosti

Úmluva: Posloupnost reálných čísel a_1, a_2, a_3, ... budeme zapisovat $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, nebo pouze (a_i), je-li definičním oborem množina všech přirozených čísel.

Posloupnost $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ lze chápat jako zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $i \mapsto a_i$, které každému přirozenému číslu i přiřadí reálné číslo a_i.

Ne vždy pracujeme s nekonečnými posloupnostmi. V případě, že uvažujeme konečnou posloupnost a_1, a_2,..., a_n, která má n členů, zapisujeme ji $(a_i)_{i=1}^{n}$. Zde ovšem horní index vypouštět nemůžeme.

Posloupnosti mohou být dány (a) předpisem pro n-tý člen, nebo (b) rekurentně, kdy je dán člen a_1 a pravidlo, jak člen a_{n+1} vypočteme z již známého členu a_n.
Například posloupnost 1, 2, 4, 8, 16, 32,... může být popsána (a) předpisem $a_n = 2^{n-1}$,
(b) rekurentně $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$.
V obou případech n nabývá všech hodnot $n = 1, 2, 3, \ldots$. To, že n nabývá čísel 1, 2, 3,..., při zadávání posloupnosti neuvádíme.

Rekurentní pravidlo, které obvykle ukazuje jak najít a_{n+1}, známe-li a_n, lze popsat jinak. Například místo $a_{n+1} = 2a_n$ můžeme psát $a_n = 2a_{n-1}$. Pak ale musíme změnit definiční obor pro index n. Ten bude $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Někdy je obtížné posloupnost, která je popsána rekurentně, popsat předpisem. Ilustraci uvidíme v úloze 12 v tomto odstavci.

Někdy se setkáváme s posloupnostmi jiných objektů, než jsou čísla. Například s posloupností bodů, vektorů, přímek, čtverců,... Ilustraci takové posloupnosti uvidíme v příkladu 3.

Dva základní typy posloupností jsou aritmetická posloupnost a geometrická posloupnost.
Aritmetická posloupnost a_1, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, $a_4 = a_3 + d$,... je popsána
(a) předpisem pro n-tý člen $a_n = a_1 + (n-1)d$, kde d je diference a čísla a_1 a d jsou dána,
(b) rekurentně $a_{n+1} = a_n + d$, kde čísla a_1 a d jsou dána.

Geometrická posloupnost a_1, $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$, $a_4 = a_1 q^3$,... je popsána
(a) předpisem pro n-tý člen $a_n = a_1 q^{n-1}$, kde q je kvocient a čísla a_1 a q jsou dána,
(b) rekurentně $a_{n+1} = a_n q$, kde čísla a_1 a q jsou dána.

Příklad 1

Najděte první čtyři členy posloupnosti dané vztahy $a_{n+1} = a_n + n^2$, $a_1 = 2$.

Řešení

Známe $a_1 = 2$, tedy $a_2 = a_1 + 1^2 = 2 + 1 = 3$.
Podobně $a_3 = a_2 + 2^2 = 3 + 4 = 7$ a $a_4 = a_3 + 3^2 = 7 + 9 = 16$.

Výsledek: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 16$.

Příklad 2

Najděte alespoň jeden rekurentní vztah pro posloupnost $-20, -19, -17, -14, -10, \dots$

Řešení

Nejedná se o aritmetickou, ani o geometrickou posloupnost. Musíme najít zákonitost jinde.
Je výhodné podívat se na rozdíly mezi každými dvěma následujícími čísly:

$$\begin{aligned} -19 &= -20 + 1 \\ -17 &= -19 + 2 \\ -14 &= -17 + 3 \\ -10 &= -14 + 4 \end{aligned}$$

Posloupnost rozdílů je tedy $1, 2, 3, 4, \dots$.
Danou posloupnost můžeme napsat rekurentně jako $a_1 = -20$ a $a_{n+1} = a_n + n$.

Výsledek: $a_1 = -20$, $a_{n+1} = a_n + n$

Příklad 3

Ze středu $S = (0, 0)$ čtverce $ABCD$, kde $A = (-6, -6)$, byl vyslán paprsek světla na stranu AB. Po dopadu v bodě $X_1(4, -6)$ se odrazí podle zákona o úhlu dopadu a odrazu a narazí na stranu BC v bodě $X_2(6, -3)$. Opět se odrazí a směřuje na stranu CD. Zde dopadne v bodě $X_3(x_3, 6)$, pokračuje směrem k bodu $X_4(-6, y_4)$ na straně AD atd. Popište posloupnost bodů X_1, X_2, X_3, X_4,....

Řešení

Obrázek 2.1:

Situaci nakreslíme na čtverečkový papír (viz obrázek 2.1). Zde lehce najdeme hledané body.

Výsledek: $X_1(4, -6)$, $X_2(6, -3)$, $X_3(0, 6)$, $X_4(-6, -3)$, $X_5(-4, -6)$, $X_6(4, 6)$, $X_7(6, 3)$, $X_8(0, -6)$, $X_9(-6, 3)$, $X_{10}(-4, 6)$, $X_{11} = X_1$ atd. Tedy $X_{n+10} = X_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnosti tohoto typu nazýváme periodické. V našem případě je perioda 10.

Příklad 4

> Najděte další tři členy posloupnosti 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... a určete její n-tý člen. Najděte aspoň dvě různá řešení této úlohy.

Řešení

Na první pohled se zdá, že úloha má jediné řešení: další tři členy jsou 4, 4, 5, a n-tý člen má tvar $a_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ pro n liché a $a_n = \frac{n}{2}$ pro n sudé. Není tomu tak. Existují i další řešení. Například $a_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + [\frac{n}{8}]$ pro n liché a $a_n = \frac{n}{2} + [\frac{n}{8}]$ pro n sudé[1]. Pak daná posloupnost vypadá následovně: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6,... Podobně lze získat nekonečně mnoho dalších řešení. Prověřte, že řešení dává každý z předpisů: $\mathrm{a}_n = [\frac{n+1}{2}] + [\frac{n}{p}]$, kde p je jakékoli reálné číslo větší než 6.

Poznámka: Vidíme, že žádná posloupnost není jednoznačně popsána svými několika prvními členy. Ani tenkrát, kdyby těch členů byl milion. Vždy totiž lze vzít dostatečně velké přirozené číslo p a k dané posloupnosti přičíst člen $[\frac{n}{p}]$. Výraz $[\frac{n}{p}]$ bude pro prvních $p-1$ členů posloupnosti nulový a začne se projevovat až od členu p-tého.
Z uvedeného plyne, že jestliže je dáno několik (lhostejno zda deset, nebo milion) prvních členů posloupnosti, pak úloha „najděte další členy posloupnosti“ a stejně i úloha „najděte n-tý člen posloupnosti“ má vždy nekonečně mnoho řešení. Na druhé straně u mnoha takových úloh bývá jen jedno řešení „pěkné“ a obyčejně takové hledáme. Ale každé další správné řešení je stejně dobré jako ono „pěkné“. V tomto duchu je nutno chápat naše řešení úloh 1, 2 a 4 uvedená ve výsledcích.

Úlohy

1. Určete n-tý člen alespoň jedné posloupnosti (a_n), jejíž první členy jsou

(a) $1, -1, 1, -1, \ldots$
(b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
(c) $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$
(d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{63}, \ldots$
(e) $1, -4, 9, -16, 25, \ldots$
(f) $-54, 18, -6, 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$
(g) $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \ldots$

2. Najděte další dva členy alespoň jedné posloupnosti, jejiž první členy jsou

(a) 4, 7, 12, 19, 28, ...
(b) 4, 5, 7, 11, 19, ...
(c) 4, 5, 3, 7, -1, ...
(d) 1, 2, 5, 14, 41,...

3. Najděte první čtyři členy posloupnosti dané rekurentními vztahy

(a) $a_{n+1} = a_n + 2n$, $a_1 = 3$,
(b) $a_{n+1} = a_n - n^2$, $a_1 = 30$.
(c) $a_{n+1} = a_n + 2n - n^2$, $a_1 = 5$,

[1] Zde hranatá závorka označuje celou část čísla. Například: $[4{,}38] = 4$, $[0{,}99] = 0$, $[\frac{11}{8}] = 1$, $[\sqrt{17}] = 4$, $[\pi] = 3$, $[23] = 23$, $[-1{,}4] = -2$,... Celá část reálného čísla x je celé číslo $[x]$, které je rovné číslu x, jestliže x je celé, a v případě, že x není celé, je rovné nejbližšímu menšímu celému číslu. Stručnější a „matematičtější“ vymezení pojmu je dáno definicí: Ke každému reálnému číslu x existuje právě jedno celé číslo $[x]$ tak, že $x - 1 < [x] \le x$. Toto celé číslo nazýváme celá část čísla x.

4. Najděte rekurentní popis alespoň jedné posloupnosti, jejíž první členy jsou

(a) 20, 17, 11, 2, −10, ... (c) 1, 2, 6, 24, 120, ...
(b) 20, 19, 15, 6, −10, ...

5. Posloupnost, která je popsána rekurentně, popište předpisem pro n-tý člen.

(a) $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 5$, (b) $a_1 = 4$, $a_n = a_{n-1} - 3$, (c) $a_1 = -5$, $a_n = a_{n-1} + 8$.

6. *Salmonella enteritidis* je jedna z bakterií, která způsobuje, že se maso kazí. V ideálních podmínkách se reprodukuje tak, že počet bakterií se zdvojnásobí každých 20 minut. Pokud je počáteční počet bakterií 1000, jaký je jejich počet (a) po 24 hodinách, (b) po n hodinách?

7. Soutěže se zúčastnilo 128 hráčů. V každém kole vypadla vždy polovina hráčů. Kolik hráčů se zúčastnilo n-tého kola? Kolik kol měla soutěž?

8. Nechť $k \in \mathbf{N}$ je pevně dané číslo. Pro posloupnost danou rekurentně předpisem $a_1 = 0$, $a_n = a_{n-1} + kn$ platí $a_4 > 20$, $a_5 < 50$. Najděte k.

9. Nechť $p \in \mathbf{N}$ je pevně dané číslo. O posloupnosti dané vztahy $a_1 = p$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ víme, že $a_4 \leq 63 < a_5$. Najděte všechny možné hodnoty pro p.

10. Počet obyvatel města vzroste o 15% každý rok. Po kolika letech se počet obyvatel zdvojnásobí?

11. Přímky $u : y = -1$ a $v : y = 1$ znázorňují rovnoběžná zrcadla. Z bodu $A = (0, 0)$ je vyslán světelný paprsek, který na zrcadlo v dopadne v bodě $X_1 = (p, 1)$, $p \in \mathbf{R}$. Najděte bod X_2, v němž paprsek poprvé dopadne na druhé zrcadlo, bod X_3, ve kterém paprsek podruhé dopadne na první zrcadlo, až bod (a) X_{10}, (b) X_{1000}, (c) X_n.

12. Posloupnost 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., která je dána rekurentně předpisem $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, se nazývá Fibonacciho. (Leonardo Fibonacci Pisanský 1180? – 1250). Najděte prvních dvacet členů této důležité posloupnosti a pokuste se odhadnout člen třicátý.

Výsledky

1. (a) $a_n = (-1)^{n-1}$, (b) $a_n = \frac{n}{n+1}$, (c) $a_n = n(n+1)$, (d) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, (e) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n^2$, (f) $a_n = (-1)^n \cdot 2 \cdot 3^{4-n}$, (g) $a_n = \sin \frac{\pi(n-1)}{6}$.

2. (a) 39, 52, (b) 35, 67, (c) 15, −17, (d) 122, 365.

3. (a) 3, 5, 9, 15, (b) 30, 29, 25, 16, (c) 5, 6, 6, 3.

4. (a) $a_1 = 20$, $a_{n+1} = a_n - 3n$, (b) $a_1 = 20$, $a_{n+1} = a_n - n^2$, (c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$.

5. (a) $a_n = 5n - 2$, (b) $a_n = 7 - 3n$, (c) $a_n = 8n - 13$.

6. (a) $2^{72} \cdot 1000$, (b) $2^{3n} \cdot 1000$.

7. $\frac{128}{2^{n-1}}$, 7 kol.

8. $k = 3$

9. $p \in \{4, 5, 6, 7\}$

10. Po pěti letech.

11. $X_2 = (3p, -1)$, $X_3 = (5p, 1)$,..., (a) $X_{10} = (19p, -1)$, (b) $X_{1000} = (1999p, -1)$, (c) $X_n((2n-1)p, (-1)^{n+1})$.

12. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, $f_{20} = 6\,765$, f_{30} je asi 832 000. K odhadu se vrátíme v příkladu **13**.

2.1.1 Aritmetická a geometrická posloupnost

Často se v souvislosti s posloupností a_1, a_2, a_3,... uvažuje i posloupnost částečných součtů, která je definována $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, nebo rekurentně $s_1 = a_1$, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$.

Připomeňme, že pro aritmetickou posloupnost $(a_1 + (n-1)d)$ je

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \tag{2.1}$$

a pro geometrickou posloupnost (a_1q^{n-1}) s kvocientem $q \neq 1$ je

$$s_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{2.2}$$

<u>Poznámka</u>: Platnost vztahu (2.2) vidíme z následující úvahy:
$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-1} = a_1(1 + q + \cdots + q^{n-1})$. Odtud $s_n = a_1(1 + q + \cdots + q^{n-1})$. Když tento vztah vynásobíme výrazem $1 - q$, dostaneme $s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$ a odtud plyne vztah (2.2).

Příklad 5

Je dána aritmetická posloupnost 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45,....
(a) Najděte a_{20}.
(b) Posloupnost popište předpisem pro n-tý člen.
(c) Posloupnost popište rekurentně.
(d) Může být mezi členy posloupnosti prvočíslo? Zdůvodněte.

Řešení

Lehce nahlédneme, že rozdíl sousedních čísel posloupnosti je 6, tedy jde o aritmetickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 9$ a diferencí $d = 6$. Tedy (b) $a_n = 9 + (n-1)6 = 6n + 3$, odkud (a) $a_{20} = 6.20 + 3 = 123$. Dále (c) $a_1 = 9$, $a_{n+1} = a_n + 6$; (d) $a_n = 6n + 3 = 3(2n+1)$ je číslo dělitelné třemi a větší než tři, tedy to nemůže být prvočíslo.

Příklad 6

Šestý člen aritmetické posloupnosti (a_n) je 33. Součet prvních 25 členů je pětkrát větší než součet prvních devíti členů. Najděte a_1 a d.

Řešení

Je dáno $a_6 = 33$ a $s_{25} = 5s_9$, tedy po použití základních vztahů pro aritmetickou posloupnost dostaneme: $a_6 = a_1 + 5d = 33$ a $s_{25} = 25a_1 + \frac{25 \cdot 24}{2} \cdot d$, $s_9 = 9a_1 + \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot d$, tedy $25a_1 + \frac{25 \cdot 24}{2} \cdot d = 5(9a_1 + \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot d)$. Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a_1 a d. Tuto soustavu vyřešíme a dostaneme $a_1 = 18$ a $d = 3$.

Kontrola: $a_6 = a_1 + 5d = 18 + 5 \cdot 3 = 33$, $s_{25} = 1350$, $s_9 = 270$ a $270 \cdot 5 = 1350$.

Výsledek: $a_1 = 18$, $d = 3$.

Příklad 7

Víme, že v aritmetické posloupnosti je $a_8 = 29$. Zjistěte číslo s_{15}.

Řešení

Nejdříve rozepíšeme s_{15}:

$$\begin{aligned} s_{15} &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{13} + a_{14} + a_{15} = \\ &= (a_1 + a_{15}) + (a_2 + a_{14}) + \cdots + (a_7 + a_9) + a_8 \end{aligned}$$

Nyní si uvědomíme, že $a_1 + a_{15} = a_2 + a_{14} = \cdots = a_7 + a_9 = 2a_8$ (například $a_1 + a_{15} = = a_1 + a_1 + 14d = 2(a_1 + 7d) = 2a_8$). Tedy

$$\begin{aligned} s_{15} &= 2a_8 + 2a_8 + \cdots + 2a_8 + a_8 = \\ &= 15a_8 = 15 \cdot 29 = 435. \end{aligned}$$

Výsledek: $s_{15} = 435$

Příklad 8

Je dána geometrická posloupnost 16, 24, 36, 54, 81,. . . .
(a) Najděte a_{10}.
(b) Popište posloupnost předpisem pro n-tý člen.
(c) Popište posloupnost rekurentně.
(d) Najděte ty členy a_n, pro které je $\sqrt{a_n}$ číslo racionální.

Řešení

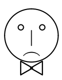
Jedná se o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 16$ a $q = \frac{3}{2}$. Tedy (b) $a_n = 16(\frac{3}{2})^{n-1} = = 3^{n-1}2^{5-n}$, pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, tedy (a) $a_{10} = 3^9 \cdot 2^{-5} = \frac{19683}{32}$, (c) $a_1 = 16$, $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{3}{2}$, (d) $\sqrt{a_n} = \sqrt{16(\frac{3}{2})^{n-1}} = 4(\frac{3}{2})^{\frac{n-1}{2}}$. Toto číslo je racionální, právě když je $(\frac{3}{2})^{\frac{n-1}{2}}$ racionální, tj. když $\frac{n-1}{2}$ je přirozené, tedy n je liché.

Příklad 9

Geometrická posloupnost a_1, a_2, a_3,. . . je tvořena celými čísly a platí $a_4 = 1998$. Najděte všechny takové posloupnosti.

Řešení

Použijeme vztah pro geometrickou posloupnost a dostaneme $a_4 = a_1q^3 = 1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$. Z tohoto vztahu ihned vidíme, že $a_1 = 2 \cdot 37$, $q = 3$ je jediné řešení.



Výsledek: $a_1 = 74$, $q = 3$.

Zapomněli jsme, že kvocient q může být i číslo 1 a číslo záporné. Tedy existují čtyři řešení: $a_1 = 74$, $q = 3$; $a_1 = -74$, $q = -3$; $a_1 = -1998$, $q = -1$ a $a_1 = 1998$, $q = 1$.

Příklad 10

Určete součet $s = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n}$.

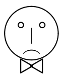
Řešení

Uvedený součet neobsahuje ani geometrickou, ani aritmetickou posloupnost, musíme ho tedy nejdříve trochu upravit. Všimneme si, že kdyby nebylo čitatelů, jednalo by se o geometrickou posloupnost s kvocientem $\frac{1}{2}$. Součet si tedy vhodně rozepíšeme:

$$s = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n} =$$

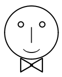
$$= \left[\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{s_1}\right] + \left[\underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{s_2}\right] + \cdots + \left[\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}}_{s_{n-1}}\right] + \left[\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{s_n}\right]$$

Součty s_1, s_2,… s_n najít umíme. Jedná se o součet několika prvních členů geometrické posloupnosti.
Dostaneme



$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

$$s_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$



Pozor, dopustili jsme se závažné chyby. Často automaticky předpokládáme, že v posloupnosti je n členů. To však byla pravda pouze u první závorky. Posloupnost ve druhé závorce má již pouze $n-1$ členů (není tam člen $\frac{1}{2}$), posloupnost ve třetí závorce pouze $n-2$ členů atd.
Tedy správně je

$$s_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n},$$

$$s_3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^n},$$

$$\cdots$$

$$s_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^n},$$

$$s_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}.$$

Hledaný součet s dostaneme jako $s = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n$. Tedy po malé úpravě máme

$$s = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right] - n \cdot \frac{1}{2^n}.$$

V závorce je opět geometrická posloupnost s kvocientem $\frac{1}{2}$. Použijeme tedy opět vzorec (2.2) a po úpravě dostaneme $s = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

Výsledek: $s = \frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

Příklad 11

Součet všech členů šestičlenné geometrické posloupnosti je $909,09$, součet sudých členů je $-101,01$. Najděte členy této posloupnosti.

Řešení

Z údajů v úloze vytvoříme rovnice za použití vztahů, které známe z geometrické posloupnosti. Dostaneme dvě rovnice

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 909,09,$$
$$a_2 + a_4 + a_6 = -101,01. \tag{2.3}$$

Obě rovnice od sebe odečteme a dostaneme

$$a_1 + a_3 + a_5 = 1010,1. \tag{2.4}$$

Rovnice (2.3) a (2.4) rozepíšeme:

$$a_1q + a_1q^3 + a_1q^5 = -101,01$$
$$a_1 + a_1q^2 + a_1q^4 = 1010,1$$

Dále upravíme na tvar

$$a_1q(1 + q^2 + q^4) = -101,01,$$
$$a_1(1 + q^2 + q^4) = 1010,1.$$

Výraz $a_1(1 + q^2 + q^4)$ z druhé rovnice dosadíme do první rovnice. Po úpravě dostaneme

$$q = -\frac{101,01}{1010,1} = -\frac{1}{10}.$$

Dopočítáme $a_1 = 1000$.

Výsledek: Posloupnost je tvořena čísly 1000, -100, 10, -1, $\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{100}$.

Příklad 12

Sedm trpaslíků kopalo u své chaloupky kanál takto: v 8.00 začal kopat první. Po jedné *peře* přišel kopat druhý, kopali tedy dva. Každou další *peru* přibyl další trpaslík, až kopali všichni. Ti pak ještě kopali tři *pery*. Kdyby tento kanál kopal jediný trpaslík, potřeboval by na práci 16 hodin a 48 minut. Kolik minut je jedna *pera*? V kolik hodin podávala Sněhurka oběd, když na mytí potřebovali trpaslíci 20 minut?

Řešení

První trpaslík kopal 9 *per*, druhý 8 *per*, ..., sedmý 3 *pery* (viz obrázek 2.2).

Obrázek 2.2:

Všichni společně kopali $9 + 8 + \cdots + 3 = 42$ *per*.
Jestliže 42 *per* je 16 hodin 48 minut, pak lehce zjistíme, že 1 *pera* je 24 minut.
Začali v 8.00 a trvalo jim to dohromady 9 *per*, tj. $9 \cdot 24$ minut $= 216$ minut. Skončili tedy v 11 hodin 36 minut.

Výsledek: Jedna *pera* je 24 minut. Trpaslíci byli s prací hotovi v 11 hodin 36 minut a umyti v 11 hodin 56 minut. Oběd tedy mohl být asi ve 12 hodin.

Příklad 13

Najděte geometrickou posloupnost, pro kterou platí rekurentní vazba Fibonacciho posloupnosti $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (viz úloha 12 z předchozího odstavce). Použijte výsledek k odhadu třicátého a čtyřicátého členu Fibonacciho posloupnosti.

Řešení

Hledáme geometrickou posloupnost $a_n = Aq^n$, pro kterou je $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, tj. $Aq^{n+2} = Aq^{n+1} + Aq^n$. Po úpravě dostaneme $q^{n+2} - q^{n+1} - q^n = 0$. Poslední kvadratická rovnice má dva kořeny: $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Takže každá geometrická posloupnost $(A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$ a $(A(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$, kde A je libovolné reálné číslo splňuje podmínku $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
První z těchto posloupností rychle narůstá a může být poměřována s posloupností Fibonacciho. Pomocí kalkulačky najděme tedy poměr posloupnosti Fibonacciho a geometrické posloupnosti dané předpisem $a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$. Najdeme prvních deset členů poměru $\frac{f_n}{a_n}$: $0,62$, $0,38$, $0,47$, $0,43$, $0,445$, $0,446$, $0,448$, $0,447$, $0,447$, $0,447$, $0,447$ (zaokrouhlováno nejprve na dvě, pak na tři desetinná místa). Jak je vidět, poměr $\frac{f_n}{a_n}$ se pohybuje kolem čísla $0,447$, a to nám dovoluje odhadnout číslo f_n jako $0,447 \cdot a_n$. Pro $n = 30$ a $n = 100$ dostáváme odhady $f_{30} = 0,447 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{30} = 831\,642$ a $f_{30} = 0,447 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{40} = 102\,285\,279$. Přesný tvar Fibonacciho čísla f_n najde čtenář sám v úloze 22.

Úlohy

1. Najděte způsob, jak pro aritmetickou posloupnost pomocí obrázku vyvodit vzorec
   $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Nejprve řešte pro $n = 5$.
2. Známe součet s_k prvních k členů aritmetické posloupnosti (a_i). Zjistěte všechny členy a_i, které z této informace lze zjistit. Řešte pro (a) $s_7 = 35$, (b) $s_8 = 16$, (c) $s_k = 100$.
3. V aritmetické posloupnosti (a_n) je $s_3 = 21$. Pro členy geometrické posloupnosti (b_n) platí $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - 1$, $b_3 = a_3 + 1$. Najděte všechny dvojice posloupností, které vyhovují uvedeným podmínkám, a posloupnosti vyjádřete vzorcem pro n-tý člen.
4. V aritmetické posloupnosti 30, 27, 24, 21,... najděte člen a_k, který se rovná jedné osmině součtu s_{k-1} všech předcházejících členů.
5. Devítičlenná aritmetická posloupnost má všechny členy celé a kladné. Které jsou to členy, je-li jejich součet 108?
6. Najděte n, jestliže je v geometrické posloupnosti dáno $q = 3$, $a_n = 177\,147$, $s_n = 265\,720$.
7. Rozepište číslo 245 jako součet n čísel tak, aby každé bylo o 5 větší než předcházející a aby poslední bylo 47.
8. Najděte s_{10} pro aritmetickou posloupnost, ve které platí $a_1 + a_2 = 2\sqrt{2} + 1$ a $a_2^2 = 2$.
9. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Dokažte, že jsou v poměru 3 : 4 : 5.
10. Součet prvních n přirozených čísel je o 100 menší než součet následujících n přirozených čísel. Najděte n.

11. Najděte aritmetickou posloupnost $(a_i)_{i=1}^4$ a geometrickou posloupnost $(b_i)_{i=1}^4$ tak, že $b_1 - a_1 = 1$, $b_2 - a_2 = 4$, $b_3 - a_3 = 17$, $b_4 - a_4 = 50$.

12. V geometrické posloupnosti a_1, a_2, a_3,... platí $a_1 \cdot a_3 = 2\,500$ a $a_4 = 8$. Najděte a_5.

13. Najděte geometrickou posloupnost, pro kterou platí $a_1 = 1$, $(a_1+a_3+a_5) : (a_2+a_4) = 21 : 10$. Najděte všechna reálná řešení.

14. Najděte číslice X, Y, Z tak, aby číslo XYZ bylo o 297 menší než číslo ZYX a aby číslice X, Y, Z tvořila geometrickou posloupnost, ve které $X + Z = \frac{5}{2}Y$.

15. Součet prvních dvou členů geometrické posloupnosti je 14 a součin prvních tří členů téže posloupnosti je 1000. Najděte a_1 a q.

16. Dluh byl splácen v měsíčních splátkách, které tvořily geometrickou posloupnost: 1 000 Kč, 250 Kč, ... Po kolika měsících klesne splátka pod 2 Kč?

17. V geometrické posloupnosti známe $a_4 = 125$, $a_{10} = \frac{125}{64}$. Vypočítejte a_{14}.

18. V aritmetické posloupnosti (a_i) je $(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100})-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}) = 100$. Které z čísel a_1, a_{100}, d lze z této vazby zjistit?

19. Je dána aritmetická posloupnost (a_i). Ukažte, že když $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5$, pak $a_5 = 2a_1$.

20. Je dána geometrická posloupnost s nenulovým kvocientem. Ukažte, že když $a_1a_2a_3 = a_4a_5$, pak $a_1^2 = a_5$.

21. Pan Novák prodával na burze hydraulické zvedáky stranové typ 7515 za 2 590 Kč kus. Prvnímu kupujícímu prodal polovinu všech hydraulických zvedáků a ještě půl zvedáku, druhému kupujícímu prodal polovinu zbylých hydraulických zvedáků a ještě půl zvedáku, třetímu zase prodal polovinu zbylých zvedáků a půl zvedáku atd. Sedmému kupujícímu prodal polovinu zbylých zvedáků a půl zvedáku, a to již bylo všechno, co měl. Kolik hydraulických zvedáků stranových měl na začátku?

22. Najděte reálná čísla A a B tak, že pro Fibonacciovu posloupnost platí $f_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

Výsledky

1. Nakreslíme si obdélník s rozměry $(a_1 + a_5) \times 5$ (viz obrázek 2.3*a*). Pak jej rozdělíme na dvě vzájemně symetrické části. Z obsahu okamžitě vidíme, že $a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$, tedy $s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{2}s$, kde $s = 5(a_1 + a_5)$ je obsah celého obdélníka.

   Zobecněná situace je nakreslena na obrázku 2.3*b*.

Obrázek 2.3:

2. (a) $s_7 = (a_1 + a_7) + (a_2 + a_6) + (a_3 + a_5) + a_4 = 7a_4$. Tedy $a_4 = \frac{35}{7} = 5$. (b) Žádný prvek a_i určit nelze. Platí totiž $s_8 = (a_1 + a_8) + (a_2 + a_7) + (a_3 + a_6) + (a_4 + a_5) = 4(a_4 + a_5)$, odtud $a_4 + a_5 = 4$. Když teď zvolím číslo a_4 libovolně, bude $a_5 = 4 - a_4$, a tedy $d = 4 - 2a_4$, odkud $a_i = a_4 + (i - 4)(4 - 2a_4)$. Stejně dobře jsme mohli volit kterýkoli jiný z prvků a_1, a_2, a_3,....

(c) Je-li $k = 2l - 1$ číslo liché, pak $s_k = s_{2l-1} = (a_1 + a_{2l-1}) + (a_2 + a_{2l-2}) + \cdots + (a_{l-1} + a_{l+1}) + a_l = (2(l-1)+1)a_l = ka_l$. Tedy $a_l = \frac{s_k}{k} = \frac{100}{k}$. Je-li $k = 2l$ číslo sudé, pak žádné z čísel a_1, a_2,... určit nelze.

3. Existují dvě řešení: $a_n = 3+(n-1)4$, $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, nebo $a_n = 12+(n-1)(-5)$, $b_n = 12 \cdot 0,5^{n-1}$.

4. Existují dvě řešení: $a_{33} = -66$, $a_6 = 15$.

5. Existují čtyři řešení: 4, 6, 8,..., 20; 8, 9, 10,..., 16; 20, 18, 16,..., 4; 16, 15, 14,..., 8.

6. $n = 12$

7. $245 = 2 + 7 + 12 + \cdots + 47$

8. Existují dvě řešení: $s_{10} = 10\sqrt{2} - 35$, $s_{10} = -150\sqrt{2} - 35$.

9. Délky stran trojúhelníka jsou a, $\frac{4}{3}a$ a $\frac{5}{3}a$.

10. $n = 10$

11. Geometrická posloupnost: 10, 20, 40, 80,..., aritmetická posloupnost: 9, 16, 23, 30,...

12. $a_5 = \pm 3,2$

13. Existují dvě reálná řešení: 1, 2, 4, 8, 16,...; 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ...

14. $X = 1$, $Y = 2$, $Z = 4$.

15. $a_1 = 4$, $q = \frac{5}{2}$.

16. Byla to šestá splátka ve výši 1,00 Kč (zaokrouhleno).

17. $a_{14} = \frac{125}{1024}$.

18. $d = 2$, jiný údaj nelze zjistit.

19. Dokážeme například rozepsáním podle vzorce $a_n = a_1 + (n-1)d$. Nebo jednodušeji: víme, že v aritmetické posloupnosti platí $a_2 + a_3 = a_1 + a_4$ a dále podle zadání $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5$, tedy $a_1 + a_1 + a_4 = a_4 + a_5$ a $2a_1 = a_5$.

20. Podobně jako u úlohy 19. V geometrické posloupnosti platí $a_2a_3 = a_1a_4$ a dále podle zadání $a_1a_2a_3 = a_4a_5$, tedy $a_1a_1a_4 = a_4a_5$ a $a_1^2 = a_5$.

21. Na začátku měl 127 hydraulických zvedáků stranových.

22. $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Tím je nalezen obecný tvar n-tého členu Fibonacciho posloupnosti.

2.2 Řady

2.2.1 Řady a matematická indukce

V tomto oddíle se podíváme blíže na matematickou indukci jako nástroj na dokazování „vzorečků“ a na nekonečné řady. Připomeňme základní pojmy.

Výraz tvaru $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots$, kde a_1, a_2, a_3, ..., a_n.,... jsou členy posloupnosti (a_n), se nazývá nekonečná řada.

Důkaz matematickou indukcí: Nechť $V(n)$ je výrok, který má smysl pro každé přirozené n od jistého k počínaje. Jestliže platí (1) $V(k)$, (2) $V(i) \Rightarrow V(i+1)$ pro všechna $i \geq k$, pak $V(n)$ platí pro všechna $n \geq k$.

Součet nekonečné geometrické řady: Nechť q je reálné číslo z intervalu $(-1, 1)$, tj. $|q| < 1$. Pak $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}$.
Poslední vztah plyne z (2.2) a této úvahy: čím větší je n, tím menší je q^n. Když n roste nade všechny meze, klesá q^n k nule tak, že je od nuly nerozeznatelné.

Příklad 14

Najděte vzorec pro součet konečné řady $s = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

Řešení

Protože se nejedná o členy aritmetické ani geometrické posloupnosti, zkusíme vzorec pro součet řady hledat experimentálně. Uděláme si tabulku částečných součtů:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	...	s_n	...
1	9	36	100	225	...		...
1^2	3^2	6^2	10^2	15^2	...	m^2	...

Dále již nemusíme pokračovat. Vidíme, že $s_n = m^2$, kde m je nějaké přirozené číslo.

Nyní musíme najít vztah mezi čísly n a m, protože vztah pro součet řady musíme mít vyjádřen pomocí n, tj. pomocí počtu členů. Opět si vytvoříme tabulku:

n	1	2	3	4	5	...
m	1	3	6	10	15	...

Při pozornějším pohledu si všimneme, že čísla v řádku m odpovídají vždy součtu všech předešlých čísel v řádku n, např. $3 = 2 + 1$, $6 = 3 + 2 + 1$. Tedy $m = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. To je konečná aritmetická posloupnost s $a_1 = 1$ a $d = 1$. Její součet je $m = \frac{n(n+1)}{2}$.
Nyní již můžeme zformulovat hypotézu:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{2.5}$$

Tuto hypotézu je však nutno ještě dokázat. Budeme dokazovat matematickou indukcí.

Důkaz tvrzení (2.5):

I. krok: Tvrzení pro $n = 1$ je zřejmé.

II. krok: Předpokládáme, že tvrzení platí pro $n = k$, a dokážeme, že pak platí i pro $n = k + 1$.

Předpoklad: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

Tvrzení: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

Budeme upravovat levou stranu dokazované rovnosti:
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3) + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$
$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$
Tvrzení je dokázáno.

Výsledek: $s = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Příklad 15

Najděte vzorec pro součet konečné řady $s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Řešení

Pokusíme-li se postupovat stejně jako v předchozím příkladu, neuspějeme. Musíme na to jít jinak. Pro odvození vzorce použijeme trik, jehož podstata vyplyne z následujících řádků:

$$\begin{array}{rcccl}
1^3 & = & (0+1)^3 & = & 0^3 + 3\cdot 0^2\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 1^2 + 1^3 \\
2^3 & = & (1+1)^3 & = & 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1^2 + 1^3 \\
3^3 & = & (2+1)^3 & = & 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1^2 + 1^3 \\
4^3 & = & (3+1)^3 & = & 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 1^2 + 1^3 \\
\dots & & & & \\
(n+1)^3 & = & (n+1)^3 & = & n^3 + 3\cdot n^2\cdot 1 + 3\cdot n\cdot 1^2 + 1^3
\end{array}$$

Nyní sečteme tyto vztahy „po sloupcích“. Dostaneme:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) +$
$+ 3(1 + 2 + \cdots + n) + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$

Nyní převedeme první závorku s opačným znaménkem z pravé strany na levou a dostaneme

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1).$$

Odtud

$$(n+1)^3 = 3s + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Vyjádříme $3s$ a dále upravíme. Dostaneme

$$\begin{aligned}
3s &= (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = \\
&= (n+1)(n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1) = \\
&= (n+1)(n^2 + \frac{n}{2}) = \frac{1}{2}(n+1)n(2n+1).
\end{aligned}$$

Tedy

$$s = \frac{1}{6}(n+1)n(2n+1).$$

Výsledek: $s = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Poznámka: Trik, který jsme při hledání posledního součtu použili, lze zobecnit:
Součet $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$ vypočteme pomocí součtu $(0+1)^{k+1} + (1+1)^{k+1} + \cdots + (n+1)^{k+1}$ podobně jako v příkladu 15.

Příklad 16

Najděte vzorec pro $\sum_{r=1}^{n}(2r^2 - 1)$.

Poznámka: Používání znaků urychluje komunikaci, ale mnohdy zvyšuje náročnost. Například znak „5“ je jistě stručnější než zápis |||||, ale člověk, který nemá znak „5“ dobře vžitý, si jej raději přepíše jako pětici čárek, aby mu lépe rozuměl. Podobně je to i s jinými znaky. Ty, s nimiž nemáme dostatek zkušeností, nám při komunikaci dělají potíže. Mezi ně jistě patří i symbol sumy $\sum$, který se objevil v zadání. Jestliže je pro vás tento symbol příliš složitý, přepište si výraz $\sum_{r=1}^{n}(2r^2-1)$ do běžného zápisu $(2\cdot 1^2-1)+(2\cdot 2^2-1)+(2\cdot 3^2-1)+$ $+(2\cdot 4^2-1)+\cdots+(2\cdot n^2-1)$ a podobně si přepište i další výrazy používající znak $\sum$ v dalším textu.

Řešení

Při pokusu zjistit tento součet experimentálně opět neuspějeme. Použijeme tedy algebru. Nejdříve si daný výraz zjednodušíme:

$$\sum_{r=1}^{n}(2r^2-1)=\sum_{r=1}^{n}2r^2-\sum_{r=1}^{n}1=$$

$$=2\sum_{r=1}^{n}r^2-\sum_{r=1}^{n}1$$

<u>Poznámka</u>: Použili jsme vztahy pro úpravu výrazů se sumami:

$$\sum_{r=1}^{n}(a\cdot f(r))=a\sum_{r=1}^{n}f(r)\quad \text{a}\quad \sum_{r=1}^{n}[f(r)\pm g(r)]=\sum_{r=1}^{n}f(r)\pm\sum_{r=1}^{n}g(r).$$

Víme, že $\sum_{r=1}^{n}1=1+1+\cdots+1=n$ a z předchozího příkladu víme, že $\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$. Nyní stačí dosadit:

$$\sum_{r=1}^{n}(2r^2-1)=2\sum_{r=1}^{n}r^2-\sum_{r=1}^{n}1=2\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-n=\frac{n}{3}(n+2)(2n-1)$$

<u>Výsledek</u>: $\sum_{r=1}^{n}(2r^2-1)=\frac{n}{3}(n+2)(2n-1)$

Úlohy

1. Najděte vzorec pro výpočet součtu konečné řady a vámi nalezený vztah dokažte:

   (a) $1+2+3+\cdots+2n$,
   (b) $\sum_{r=1}^{n}r(r+1)$,
   (c) $1+3+5+\cdots+(2n-1)$,
   (d) $2+4+6+\cdots+2n$,
   (e) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)$,
   (f) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,
   (g) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$,
   (h) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2$,
   (i) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}$.

2. Najděte součet řady $s=1\cdot 2\cdot 3+3\cdot 4\cdot 5+5\cdot 6\cdot 7+\cdots+(2n-1)2n(2n+1)$.

3. Najděte vzorec pro n-tý člen řady $a_1+a_2+\cdots+a_n+\ldots$, jestliže součet jejích prvních n členů je $s_n=3n^2+2n$.

4. Najděte vzorec pro součet prvních n členů posloupnosti (a) 3, 7, 11, 15,…, (b) 1, $\frac{9}{10}$, $\frac{81}{100}$, $\frac{729}{1000}$,…, (c) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, …, $\frac{1}{2n(n-1)}$, ….

5. Najděte vzorec pro součet konečné řady $s=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$.

Výsledky

1. Uvádíme pouze výsledky. Důkaz matematickou indukcí je analogický jako u příkladu 14. Liší se vždy pouze úpravami.

   (a) $n(2n+1)$, (b) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, je výhodné použít metodu příkladu 16, (c) n^2, viz obrázek 2.4, (d) $n(n+1)$, (e) viz (b), (f) $\frac{n}{2n+1}$, (g) $\frac{n}{4n+1}$, (h) $\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$, (i) $\frac{n}{n+1}$.

Obrázek 2.4:

2. $s = n(n+1)(2n^2+2n-1)$. Je výhodné použít metodu příkladu 16.
3. Protože $s_1 = 5$, $s_2 = 16$, $s_3 = 33$, $s_4 = 56, \ldots$, je též $a_1 = 5$, $a_1 + a_2 = 16$, $a_1 + a_2 + a_3 = 33$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 56, \ldots$. Odtud $a_1 = 5$, $a_2 = 16 - 5 = 11$, $a_3 = 33 - 16 = 17$, $a_4 = 56 - 33 = 23, \ldots$. Obecně $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, $a_{n+1} = 3(n+1)^2 + 2(n+1) - 3n^2 - 2n = 6(n+1) - 1$. Tedy $a_{n+1} = 6(n+1) - 1$ a $a_n = 6n - 1$.
4. (a) $n(2n+1)$, (b) $10(1 - 0,9^n)$, (c) $\frac{n-1}{2n}$.
5. Použijte trik z příkladu 15. Výsledek: $s = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

2.2.2 Nekonečné geometrické řady

Příklad 17

Je dáno číslo $a = 0,\overline{48}$. Vyjádřete je jako zlomek v základním tvaru.

Řešení I

Podívejme se nejdříve na číslo $a' = 0,48$. Dovedli bychom ho napsat jako zlomek? Dovedli, a to jednoduchým způsobem jako $a' = 0,48 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$. Stejně i číslo $a'' = 0,4848$ umíme převést jako $a'' = 0,4848 = \frac{4848}{10000} = \frac{303}{625}$, či $a''' = 0,484848 = \frac{484848}{1000000} = \frac{30303}{62500}$. Kdybychom takto pokračovali dále, získali bychom zlomky $\frac{3030303}{6250000}, \frac{303030303}{625000000}, \ldots$. Je zřejmé, že čím více „48“ budeme přidávat za desetinnou čárku, tím více se budeme blížit k číslu a.

Tímto způsobem ovšem nelze dostat přesné řešení pro číslo s neukončeným desetinným rozvojem. Musíme se na něj podívat jiným způsobem. Číslo a můžeme napsat také jako
$$a = \frac{48}{100} + \frac{48}{10000} + \frac{48}{1000000} + \ldots.$$
Je zřejmé, že každý další sčítanec bude stokrát menší než sčítanec předešlý. Jedná se tedy o nekončenou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1}{100}$ a prvním členem $a_1 = \frac{48}{100}$:
$$48 \cdot \frac{1}{100} + 48 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 + 48 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \ldots$$
Protože je $-1 < q < 1$, nekonečná geometrická řada má součet:
$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{48}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{16}{33}$$
Tedy $a = \frac{16}{33}$. Výpočtem na kalkulačce si přibližně ověříme, že se asi jedná o námi hledané číslo a.

Výsledek: $a = \frac{16}{33}$

Řešení II

U tohoto typu úloh si můžeme také vypomoci trikem. Číslo a vynásobíme číslem 10^2 (protože perioda čísla a je dvojmístná). Dostaneme dvě rovnice $a = 0,48\overline{48}$, $100a = 48,48\overline{48}$.

Obě rovnice od sebe odečteme:

$$100a - a = 48,48\overline{48} - 0,48\overline{48} = 48$$

Tedy

$$99a = 48 \quad \text{a} \quad a = \frac{48}{99} = \frac{16}{33}.$$

Výsledek: $a = \frac{16}{33}$

Příklad 18

Je dáno číslo $b = 0,23\overline{48}$. Vyjádřete ho jako zlomek v základním tvaru.

Číslo b se od čísla $a = \frac{16}{33} = 0,\overline{48}$ liší předperiodou. Můžeme ho zapsat jako $b = 0,23 + b'$, kde

$$b' = 0,00\overline{48} = \frac{48}{10000} + \frac{48}{1000000} + \frac{48}{100000000} + \cdots = \frac{1}{100}a = \frac{1}{100} \cdot \frac{16}{33} = \frac{4}{825}.$$

Výsledek: $b = \frac{23}{100} + \frac{4}{825} = \frac{31}{132}$

Příklad 19

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu B a $|BC| = 3$, $|CA| = 5$ a $|AB| = 4$. Z vrcholu B spustíme kolmici na stranu b, patu této kolmice označíme B_1. Z B_1 spustíme kolmici na stranu c, patu této kolmice označíme B_2, dále z B_2 spustíme kolmici na b a dostaneme B_3 atd. Vypočítejte délku L nekonečné lomené čáry $CBB_1B_2\ldots$.

Řešení I

Nakreslíme si obrázek 2.5a a vyznačíme si na něm lomenou čáru, jejíž délku hledáme. Podíváme se na posloupnost pravoúhlých trojúhelníků BB_1C, B_1B_2B, $B_2B_3B_1$, $B_3B_4B_2$,.... Všechny jsou navzájem podobné, neboť každý je podobný s původním trojúhelníkem ABC. Označme $\alpha = |<BAC|$. Potom $\alpha = |<B_1BC|$, a tedy $\cos\alpha = \frac{|B_1B|}{|CB|}$, odkud $a_1 = |BC| = 3$, $a_2 = |BB_1| = |CB|\cos\alpha = 3\cos\alpha$. Podobně z trojúhelníka B_1B_2B dostaneme $a_3 = a_2\cos\alpha$ a z trojúhelníka $B_2B_3B_1$ dostaneme $a_4 = a_3\cos\alpha$ atd.

Posloupnost (a_1) je teď popsána rekurentně: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n\cos\alpha$.

Z popisu vidíme, že se jedná o geometrickou posloupnost s kvocientem $\cos\alpha = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Tedy

$$L = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = 3 + 3\cos\alpha + 3\cos^2\alpha + 3\cos^3\alpha + \cdots =$$
$$= 3(1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \ldots) = 3(1 + 0,8 + 0,8^2 + \ldots) = 3\frac{1}{1-0,8} = 15.$$

Výsledek: Délka lomené čáry je 15.

Obrázek 2.5:

Řešení II

Danou úlohu můžeme také řešit geometricky (viz obrázek 2.5b). Trojúhelník MCA je pravoúhlý. Velikost $|MB|$ vypočítáme například pomocí Euklidovy věty o výšce a pak podle Pythagorovy věty dopočítáme $|MA|$. Tj. $|MB| = \frac{16}{3}$, $|MA| = \frac{20}{3}$. Délka L tedy je
$L = |MA| + |MB| + |BC| = \frac{20}{3} + \frac{16}{3} + 3 = 15$.

Příklad 20

Najděte součet $s = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots$

Řešení I

Zlomky netvoří členy ani geometrické, ani aritmetické posloupnosti. Při bližším pohledu zjistíme, že kdyby v čitatelích všech zlomků bylo číslo 1, jednalo by se o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{2}$, která má součet. Musíme tedy naši řadu rozepsat tak, abychom získali geometrické řady (podobně jako u příkladu 10). Následující postup snad nepotřebuje komentář (v hranatých závorkách dostaneme vždy geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{2}$, jejíž součet umíme vypočítat):

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots = \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots\right) + \dots = \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}} + \dots = 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots) = 2\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}
$$

Výsledek: $s = 2$

Řešení II

Danou úlohu můžeme řešit také geometricky (viz obrázek 2.6).

Obrázek 2.6:

Úsečku AB rozdělíme body A_i podle obrázku 2.6. Nad úsečkami AA_1, A_1A_2, A_2A_3,... postupně sestrojíme obdélníky s obsahy $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$, ... Takto vytvořený útvar U „nakrájíme" na vodorovné obdélníky. Jejich obsahy zdola jsou 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... Součet $s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$ (viz obrázek 2.8). Tedy $s = s_1 = 2$.

Řešení III

Existuje ještě jeden způsob řešení úloh tohoto typu. Tento způsob bude vysvětlen u příkladu 23.

Příklad 21

Vypočítejte $X = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[16]{3} \cdot \dots$

Řešení

Úloha je jednoduchá, stačí si odmocniny zapsat exponenciálním způsobem:

$$X = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[16]{3} \cdot \dots = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{1}{8}} 3^{\frac{1}{16}} \dots = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots}$$

V exponentu jsme dostali nekonečnou geometrickou řadu s $q = \frac{1}{2}$. Protože $-1 < q < 1$, má řada součet. Tedy

$$X = 3^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = 3^2 = 9.$$

Výsledek: $X = 9$

Příklad 22

Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici: $\sqrt{10 \cdot 2^x - 4} = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots$

Řešení

Nejdříve si upravíme pravou stranu rovnice. Jedná se o součet nekonečné geometrické řady s $q = \frac{1}{2}$ a $a_1 = 2^x$. Protože $-1 < q < 1$, řada má součet, a to $s = \frac{2^x}{1-\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^x$.
Nyní už řešíme rovnici obvyklým způsobem:

$$\sqrt{10 \cdot 2^x - 4} = 2 \cdot 2^x$$

Umocníme na druhou

$$10 \cdot 2^x - 4 = 4 \cdot 2^{2x}.$$

Upravíme

$$5 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{2x} - 2 = 0.$$

Aby se nám lépe počítalo, zavedeme substituci $2^x = y$ a dostaneme kvadratickou rovnici $-2y^2 + 5y - 2 = 0$ s kořeny $y_1 = 2$ a $y_2 = \frac{1}{2}$. Ze vztahu $2^x = y$ vyjádříme $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Dosazením do původní rovnice se přesvědčíme, že oba kořeny vyhovují.

Výsledek: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Příklad 23

Vypočítejte součet $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$.

Řešení

Rozepíšeme sumu $s = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots$. Vidíme, že se nejedná o geometrickou řadu, ale geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{3}$ je v „naší" řadě obsažena. Tyto typy úloh můžeme řešit stejně, jak bylo ukázáno u příkladu 20, nebo trikem. Trik spočívá v tom, že řadu vynásobíme kvocientem řady, která je v původní řadě obsažena, a pak získanou rovnici odečteme od původní rovnice. V našem případě tedy vynásobíme řadu číslem $\frac{1}{3}$:

$$s = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots \quad \Big| \cdot \frac{1}{3}$$

Dostaneme

$$\frac{1}{3}s = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \dots.$$

Obě rovnice od sebe odečteme a dostaneme

$$\frac{2}{3}s = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots.$$

Zde se již jedná o geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1}{3}$. Protože $-1 < q < 1$, má řada součet. Tedy

$$\frac{2}{3}s = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \quad s = \frac{3}{4}.$$

Výsledek: $s = \frac{3}{4}$

Příklad 24

Určete součet řady: $s = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x + \dots$

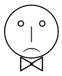
Řešení

Již dříve se nám vyplatilo, když jsme si řadu (pokud se nejednalo o geometrickou řadu) vhodným způsobem rozepsali, abychom geometrickou řadu dostali. Učiníme to i tentokrát. Následující řádky snad nepotřebují komentář:

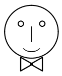
$$\begin{aligned} s &= \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x + \dots = \\ &= (\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots) + (\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots) \end{aligned}$$

V hranatých závorkách jsme dostali geometrické řady s kvocientem $q = \sin^2 x$, resp. $q' = \cos^2 x$, a prvním členem $a_1 = \sin^2 x$, resp. $a_1' = \cos^2 x$. Můžeme tedy vypočítat hledaný součet:

$$s = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{cotg}^2 x$$



Výsledek: $s = \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{cotg}^2 x$



Zapomněli jsme na důležitou podmínku, kdy má geometrická řada součet. Pro kvocient musí platit $-1 < q < 1$. Tedy v našem případě musí platit

$$0 \le \sin^2 x < 1 \quad \wedge \quad 0 \le \cos^2 x < 1.$$

V obou případech pro x musí platit, že $x \neq k\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbf{Z}$.

Výsledek: $s = \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{cotg}^2 x$ pro $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Příklad 25

Sestrojte přibližně graf funkce $f(x) = 4 \cdot \frac{1-0{,}6^x}{1-0{,}6}$ a najděte jeho horizontální asymptotu. Dále najděte vztah funkce f a řady $\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 0{,}6^{n-1}$.

Poznámka: Přímka $p : y = c$ je asymptotou funkce f pro x jdoucí do plus či mínus nekonečna, jestliže rozdíl $|c - f(x)|$ je pro dosti velká x libovolně malý.

Řešení

Graf vyneseme například pomocí grafického kalkulátoru nebo nějakého matematického programu (viz obrázek 2.7). Z grafu můžeme usoudit, že horizontální asymptota funkce je přímka $y = 10$.

Nyní najdeme součet $\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 0{,}6^{n-1} = \frac{4}{1-0{,}6} = 10$.

Součet dané řady je 10 stejně jako horizontální asymptota grafu funkce. Jak je to možné? Když se podíváme pozorněji na rovnici funkce f, zjistíme, že se jedná o vzorec součtu konečného počtu členů

Obrázek 2.7:

geometrické posloupnosti s $a_1 = 4$ a $q = 0,6$. Suma $\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 0,6^{n-1}$ představuje nekonečnou geometrickou posloupnost s $a_1 = 4$ a $q = 0,6$.

Všimněte si grafu funkce f. Čím větší je x, tím více se y-ová hodnota blíží k číslu 10. Nebo-li budeme-li zvyšovat n u konečné geometrické posloupnosti, budeme se blížit hodnotě součtu nekonečné geometrické řady se stejným prvním členem a kvocientem. To je hledaná souvislost.

Úlohy

1. Vyjádřete daná čísla jako zlomky v základním tvaru:

   (a) $0,\overline{6}$, (b) $0,3\overline{45}$, (c) $0,\overline{45}$, (d) $0,\overline{123}$, (e) $0,\overline{422}$, (f) $0,25\overline{4}$, (g) $1,20\overline{84}$.

2. Vypočítejte součet $s = \frac{1}{2} + \frac{7}{4} + \frac{13}{8} + \frac{19}{16} + \dots$

3. Vypočítejte součet $s = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\sin\alpha + \frac{3}{27}\sin^2\alpha + \dots$

4. Vypočítejte $s = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[8]{a^5} \cdot \sqrt[16]{a^7} \cdot \dots$.

5. Najděte $x \in \mathbf{R}$: $8 = 1 + 3\sin x + 6\sin^2 x + 10\sin^3 x + 15\sin^4 x + \dots$

6. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici: $2 = 2^x + 2 \cdot 2^{2x} + 3 \cdot 2^{3x} + \dots$

7. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici: $1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{6}{x+5}$

8. Sestrojte přibližně graf funkce $f(x) = 6 \cdot \frac{1-0,5^x}{1-0,5}$ a najděte jeho horizontální asymptotu. Dále najděte vztah funkce f a řady $\sum_{n=0}^{\infty} 6(\frac{1}{2})^n$.

9. Sestrojte přibližně graf funkce $f(x) = 2 \cdot \frac{1-0,8^x}{1-0,8}$ a najděte jeho horizontální asymptotu. Dále najděte vztah funkce f a řady $\sum_{n=0}^{\infty} 2(\frac{4}{5})^n$.

10. Je dána nekonečná geometrická řada $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_3 = \frac{2}{4+3\sqrt{2}}$. Určete její součet s, pokud existuje.

11. Stanovte nekonečnou geometrickou posloupnost, jejíž první člen je 1 a každý člen je roven součtu všech následujících členů.

12. Stanovte nekonečnou geometrickou posloupnost, jejíž první člen je 1 a každý člen je roven dvojnásobku součtu všech následujících členů.

13. Sestrojíme čtverec $ABCD$ o straně délky 1 m a dále sestrojíme nekonečný počet čtverců vepsaných jeden do druhého tak, že vrcholy menšího čtverce jsou středy stran předcházejícího většího čtverce. Jaký je součet obsahů s všech sestrojených čtverců (včetně čtverce $ABCD$)?

14. Předchozí úlohu řešte v případě, že vrcholy menšího čtverce rozdělují stranu předcházejícího většího čtverce v poměru 1 : 2.

15. Nechť je dán čtverec $ABCD$ o straně 1 m. Ve vzdálenosti p od bodu A a ve vzdálenosti t od bodu B je na straně AB dán bod X (tj. $p + t = 1$). V bodě X je vrchol vepsaného menšího čtverce, jehož strana je opět rozdělena bodem X_1 ve stejném poměru jako strana čtverce $ABCD$. V bodě X_1 je vrchol vepsaného dalšího čtverce atd. Zjistěte, jaké musí být p a t, aby součet obsahů všech takto sestrojených čtverců byl 5.

16. Zlomek $\frac{1}{1-2x}$ můžeme považovat za součet geometrické řady. Napište tuto řadu a uveďte podmínku pro x.

17. Vypočítejte součet: $s = \frac{1}{2} \cdot \log 2 + \frac{1}{4} \cdot \log 4 + \frac{1}{8} \cdot \log 8 + \frac{1}{16} \cdot \log 16 + \dots$

18. Čtverci o straně a_1 je vepsána kružnice. Do kružnice je zase vepsán čtverec, do něj zase kružnice atd. Najděte součet objemů V všech rotačních těles vzniklých otáčením čtverců kolem úhlopříčky.

19. Do čtverce strany a je vepsána kružnice, do ní zase čtverec, do čtverce zase kružnice atd. Najděte součet obsahů s všech čtverců.

20. Jednotkovou úsečku AB rozdělíme body A_1, A_2, A_3,... tak, že A_1 je střed úsečky AB, A_2 je střed úsečky A_1B, A_3 je střed úsečky A_2B atd. Nad každou z úseček AA_1, A_1A_2, A_2A_3, atd. sestrojíme čtverec. Sjednocením všech čtverců dostaneme útvar U. Určete jeho obsah.

Výsledky

1. (a) $\frac{2}{3}$, (b) $\frac{19}{55}$, (c) $\frac{5}{11}$, (d) $\frac{41}{333}$, (e) $\frac{422}{999}$, (f) $\frac{229}{900}$, (g) $\frac{997}{825}$.
2. Vynásobte řadu zlomkem $\frac{1}{2}$ a odečtěte (viz příklad 23). Výsledek: $s = 7$
3. Vynásobte řadu výrazem $\frac{1}{3}\sin\alpha$ a odečtěte. Výsledek: $s = \frac{3}{(3-\sin\alpha)^2}$ pro $\alpha \in \mathbf{R}$.
4. $s = a^3$ pro $a \geq 0$.
5. Rovnici vynásobte dvakrát po sobě výrazem $\sin x$ ($\sin x \neq 0$) a vždy odečtěte obě získané rovnice. Výsledek: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_1 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
6. Vynásobte rovnici číslem 2^x. Výsledek: $x = -1$ (pro $x = 1$ není řada na pravé straně rovnice konvergentní, nemůžeme tedy najít její součet).
7. $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.
8. (Viz příklad 25) $y = 12$, $\sum_{n=0}^{\infty} 6(\frac{1}{2})^n = 12$.
9. (Viz příklad 25) $y = 10$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2(\frac{4}{5})^n = 10$.
10. Daným podmínkám vyhovují dvě řady: $q_1 = \sqrt{2} - 1$, $q_2 = -\sqrt{2} + 1$. V obou případech platí podmínka pro existenci součtu nekonečné geometrické řady a $s_1 = \sqrt{2} + 1$, $s_2 = 1$.
11. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ (viz obrázek 2.8).

Obrázek 2.8:

12. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$
13. $s = 2\,\mathrm{m}^2$
14. $s = \frac{9}{4}\,\mathrm{m}^2$
15. $t = \frac{1}{10p}$, kde t i p jsou z intervalu $(0, 1)$.
16. Hledaná řada: $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$, kde $|x| < \frac{1}{2}$.

17. Převeďte všechny logaritmy na násobky $\log 2$, a pak řešte podle návodu z příkladu 23. Výsledek: $s = \log 4$

18. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a_1^3(4+\sqrt{2})}{21}$

19. $s = 2a^2$

20. $U = \frac{1}{3}$

2.3 Úrokování

Terminologie: Vložíme-li do banky obnos K na dobu n let, vrátí nám banka po této době obnos $K+u$. Částka K se nazývá jistina, nebo vklad, částka u se nazývá úrok (daný v měnové jednotce a za určité období, většinou za rok). Výše úroku závisí na způsobu úrokování a třech veličinách: jistině K, úrokové míře p (dané v setinách procent) a době n, po kterou byla jistina v bance uložena.
Zde budeme mluvit o třech způsobech úrokování – jednoduchém, složeném a spojitém.

Varování: Běžně se říká „Mám uloženo 1000 Kč na osmiprocentní úrok“. Je to nekorektní vyjadřování. Správně nutno říci „Mám uloženo 1000 Kč na osmiprocentní úrokovou míru, tedy úrok z této jistiny bude 80 Kč“.

2.3.1 Jednoduché úrokování

Úrok při jednoduchém úrokování je dán vzorcem $u = K \cdot p \cdot n$.

Příklad 26

Slečna Pokorná střádá v IPB při jednoduchém úrokování a úrokové míře 11,4%. Kolik nastřádá, když ukládá (a) měsíčně 500 Kč po dobu 18 měsíců, (b) týdně 130 Kč po dobu 80 týdnů?

Řešení

(a) První vklad $K = 500$ Kč bude uložen 18 měsíců, tj. $\frac{3}{2}$ roku. Přinese tedy úrok $u_1 = K \cdot p \cdot n_1 = 500 \cdot 0,114 \cdot \frac{3}{2}$ Kč $= 85,5$ Kč.
Druhý vklad 500 Kč bude uložen 17 měsíců, tj. $\frac{17}{12}$ roku. Přinese tedy úrok $u_2 = K \cdot p \cdot n_2 = 500 \cdot 0,114 \cdot \frac{17}{12}$ Kč $= 80,75$ Kč.
Třetí vklad bude uložen 16 měsíců, tj. $\frac{16}{12}$ roku. Přinese tedy úrok $u_3 = 500 \cdot 0,114 \cdot \frac{4}{3}$ Kč $= 76$ Kč.
Podobně vypočteme $u_4 = 71,25$ Kč, $u_5 = 66,50$ Kč, $u_6 = 61,75$ Kč, $u_7 = 57$ Kč, $\ldots$, $u_{17} = 9,5$ Kč, $u_{18} = 4,75$ Kč.
Celkový úrok slečny Pokorné je tedy $U = u_1 + u_2 + \cdots + u_{18}$. To je součet osmnácti členů aritmetické řady s prvním členem $u_1 = 85,5$ Kč a posledním členem $u_{18} = 4,75$ Kč. Tedy $U = 18 \cdot \frac{85,5+4,75}{2}$ Kč $= 812,25$ Kč.

Výsledek: Nastřádá 9812,25 Kč.

(b) Postupujeme rychleji. Tušíme, že matematickým modelem dané situace je aritmetická posloupnost. Protože týden je $\frac{1}{52}$ roku, přinese první vklad úrok $u_1 = K \cdot p \cdot n_1 = 130 \cdot 0,114 \cdot \frac{80}{52}$ Kč.
Obecně, i-tý vklad dá úrok $u_i = K \cdot p \cdot n_i = 130 \cdot 0,114 \cdot \frac{81-i}{52}$ Kč.

Celkový úrok je tedy $U = u_1 + u_2 + \cdots + u_{80} = K \cdot p \cdot (n_1 + n_2 + \cdots + n_{80}) = K \cdot p \cdot N$, kde $N = 80 \cdot \frac{n_1+n_{80}}{2} = 40 \cdot (\frac{80}{52} + \frac{1}{52}) = 40 \cdot \frac{81}{52} = \frac{810}{13}$.
Tedy $U = 130 \cdot 0,114 \cdot \frac{810}{13}\,\text{Kč} = 923,40\,\text{Kč}$.

Výsledek: Nastřádá 11 323,40 Kč.

Úlohy

1. U banky Haná střádají Petr a Líba. Oba při úrokové míře 10,4 % a jednoduchém úrokování po dobu dvou let. Petr ukládá měsíčně 1 000 Kč, Líba ukládá týdně 250 Kč. Oba dva tedy vloží stejný obnos 24 000 Kč. Kolik získá na úroku (a) Petr, (b) Líba?

2. Situace „střádání“ je charakterizována pěti údaji: výše vkladů K, úroková míra p, doba střádání d (jako část roku), počet vkladů m, celkový úrok U. Tak v příkladu 26 je

   (a) $K = 500\,\text{Kč}$, $p = 11,4\,\%$, $d = \frac{3}{2}$ (roku), $m = 18$, $U = 812,25\,\text{Kč}$,

   (b) $K = 130\,\text{Kč}$, p $= 11,4\,\%$, $d = \frac{80}{52}$ (roku), $m = 80$, $U = 923,40\,\text{Kč}$.

   Čtyři z těchto hodnot jsou dány, zjistěte zbývající hodnotu v každém ze sloupců a až h. Hodnoty K a U zaokrouhlujeme na 1 Kč, hodnotu p na desetinu procenta.

	a	b	c	d	e	f	g	h
K	800		5 000	6 000	400	400	640	1 200
p	9,6	9,8		10,2	9,1		9,3	9,0
d	$\frac{3}{2}$	2	1,5		$\frac{1}{4}$	1	2,5	
m	18	24	6	4		52	65	39
U		1 837	2 310	2 040	59	1 007		4 860

3. Napište vzorec na výpočet hodnoty U, je-li známo K, p, d, m, kde m je počet vkladů a d je doba střádání.

Výsledky

1. (a) $U = K \cdot p \cdot (\frac{24}{12} + \frac{23}{12} + \cdots + \frac{1}{12}) = K \cdot p \cdot 25 = 1\,000 \cdot 0,104 \cdot 25\,\text{Kč} = 2\,600\,\text{Kč}$.

   (b) $U = K \cdot p \cdot (\frac{104}{52} + \cdots + \frac{1}{52}) = 250 \cdot 0,104 \cdot 105\,\text{Kč} = 2\,730\,\text{Kč}$.

2. (a) $1\,094,40\,\text{Kč} \doteq 1\,094\,\text{Kč}$, (b) $749,80\,\text{Kč} \doteq 750\,\text{Kč}$, (c) 8,8 %, (d) $\frac{4}{3}$, (e) 12, (f) 9,5 %, (g) $4\,910,40\,\text{Kč} \doteq 4\,910\,\text{Kč}$, (h) $\frac{9}{4}$.

3. $U = K \cdot p \cdot d \cdot \frac{m+1}{200}$

2.3.2 Složené úrokování

Složené úrokování je takový způsob úrokování, ve kterém se úrok po každém úrokovém období připisuje k jistině, a tedy sám přináší v následujícím období další úrok.

Příklad 27

Pan Černý vložil do KB jistinu $K = 10\,000\,\text{Kč}$ na složené úrokování při úrokové míře $p = 10,2\,\%$. Kolik získá na úroku po (a) třech, (b) sedmi letech?

Řešení

(a) Najdeme úrok u_1 za první rok spoření. Ten přičteme k vkladu K a získáme jistinu $K_1 = K + u_1$ pro druhý rok šetření. To ještě dvakrát opakujeme.
Úrok v prvním roce: $u_1 = K \cdot p = 10\,000 \cdot 0,102\,\text{Kč} = 1\,020\,\text{Kč}$. Tedy jistina pro druhý rok: $K_1 = K + u_1 = 11\,020\,\text{Kč}$.
Úrok ve druhém roce: $u_2 = K_1 \cdot p = 11\,020 \cdot 0,102\,\text{Kč} = 1124,04\,\text{Kč}$. Tedy jistina pro třetí rok: $K_2 = K_1 + u_2 = 12\,144,04\,\text{Kč}$.
Úrok ve třetím roce: $u_3 = K_2 \cdot p = 12\,144,04 \cdot 0,102\,\text{Kč} = 1238,69208\,\text{Kč}$.

Výsledná suma se obvykle zaokrouhlí na celé desetihaléře, nebo koruny, zbytek propadá ve prospěch banky. Tedy $U = 1\,020\,\text{Kč} + 1\,124,04\,\text{Kč} + 1\,238,70\text{Kč} = 3\,382,70$ Kč (resp. $3\,382\,\text{Kč}$).

Výsledek: Na úrocích získá $3\,382\,\text{Kč}$.

(b) Popsaným postupem lze pokračovat dále a zjistit postupně jistiny i úroky za další léta. Proces opakovaných operací však lze výrazně urychlit. Napišme si ještě jednou kostru předchozího výpočtu:

$$K \to K_1 = K + K \cdot p \to K_2 = K_1 + K_1 \cdot p \to K_3 = K_2 + K_2 \cdot p$$

Po úpravě:

$$K \to K_1 = K \cdot (1 + p) \to K_2 = K_1 \cdot (1 + p) \to K_3 = K_2 \cdot (1 + p)$$

Vidíme, že ve výpočtech hraje kardinální roli číslo $1 + p = 1,102$. Toto číslo označujeme q a nazýváme jej úročitel. Tedy

$$K_1 = K \cdot q,\ K_2 = K_1 \cdot q = K \cdot q^2,\ K_3 = K_2 \cdot q = K \cdot q^3.$$

Obecně: $K_i = K \cdot q^i = 10\,000 \cdot 1,102^i\,\text{Kč}$. Po sedmi letech bude jistina $K_7 = K \cdot q^7$. Tedy celkový úrok činí $U = K_7 - K = K \cdot (q^7 - 1)$.

Výpočet: $q^7 = 1,102^7 = 1,973654648$ (s přesností 10^{-9}), $U = K \cdot (q^7 - 1) = 10\,000 \cdot 0,973654648\,\text{Kč} \doteq 9\,736,50\,\text{Kč}$ (resp. $9\,736\,\text{Kč}$).

Výsledek: Na úroku získá $9\,736\,\text{Kč}$.

Příklad 28

Pan Nowak vložil do National Trust 5 000 USD na složené úrokování. Peníze tam nechal tři roky. V těchto letech byla úroková míra banky NT postupně $p_1 = 8,3\,\%$, $p_2 = 8,2\,\%$, $p_3 = 8,7\,\%$.
(a) Kolik získal pan Nowak na úroku?
(b) Syn pana Nowaka, David, kontroloval výpočet otce pomocí vzorce: $U = K \cdot (q^3 - 1)$, kde $q = 1 + p$ a $p = 8,4\,\%$ je aritmetický průměr čísel p_1, p_2, p_3. Je Davidův postup správný?

Řešení

(a) $K_1 = K \cdot q_1$, kde $q_1 = 1 + p_1 = 1,083$, $K_2 = K_1 \cdot q_2$, kde $q_2 = 1 + p_2 = 1,082$, $K_3 = K_2 \cdot q_3$, kde $q_3 = 1 + p_3 = 1,087$. Tedy $U = K_3 - K = K \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 - 1) = 5\,000 \cdot (1,083 \cdot 1,082 \cdot 1,087 - 1) \doteq 1\,368,76$ USD.

(b) Davidův postup není správný, ale chyba, které se dopouští je zanedbatelná:
$U = K \cdot (q^3 - 1) = 5\,000 \cdot 0,27376$ USD $\doteq 1\,368,80$ USD.

Poznámka: Čísla $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$ a q^3 jsme počítali s přesností 10^{-5}.

Úlohy

1. Vložím do banky jistinu $K = 10\,000\,\text{Kč}$ na složené úrokování při úrokové míře $p = 9,8\,\%$. Kolik získám na úroku po (a) dvou, (b) třech, (c) sedmi, (d) n letech?

2. Z jistiny K uložené na pět let na složenou úrokovou míru $p = 11,2\,\%$ vzešel úrok $24\,510\,\text{Kč}$. Zjistěte (s přesností na $1\,\text{Kč}$) jistinu K.

3. Znáte tři z těchto čtyř hodnot: jistina K, úroková míra p, úrok U a délka vkladu n (tj. počet let, na které byla jistina K uložena). Zjistěte zbývající hodnotuv každém sloupci a a h. Hodnoty K a U jsou udány v Kč, p v procentech. Počítejte s přesností na 1 Kč a úrokovou míru s přesností na desetinu procenta.

	a	b	c	d	e	f	g	h
K	10 000	21 000	57 000	90 000			35 000	17 000
p	9,5	9,2	8,6	6,9	4,1	3,9		
U			36 509	27 531	6 429	18 620	12 441	6 300
n	3	3			10	8	4	4

4. Pan Vrba uložil v KB $100\,000\,\text{Kč}$ a nechal je tam šest let. V těchto letech byla úroková míra v KB postupně $p_1 = 10,3\,\%$, $p_2 = 10,2\,\%$, $p_3 = 10,2\,\%$, $p_4 = 9,6\,\%$, $p_5 = 10,0\,\%$, $p_6 = 10,3\,\%$.

   (a) Kolik získal pan Vrba na úroku? (b) Jaké chyby se dopustíme, když k výpočtu použijeme Davidův postup z příkladu 28?

5. Předcházející úlohu část (a) řešte za předpokladu, že pan Vrba vždy po uplynutí ročního vkladového období ze svého vkladu z knížky vybere obnos $v = 10\,000\,\text{Kč}$. Při této operaci je do knížky pana Vrby zapsán aktuální stav zaokrouhlen na celé koruny – haléře propadají ve prospěch KB.

Výsledky

1. Úročitel je $q = 1 + p = 1,098$. Pak

   (a) $K_2 = K \cdot q^2 = 12\,056,04\,\text{Kč}$, tedy úrok je $K_2 - K \doteq 2\,056\,\text{Kč}$,

   (b) $K_3 = K \cdot q^3 = 13\,237,50\,\text{Kč}$, tedy úrok je $K_3 - K \doteq 3\,237\,\text{Kč}$,

   (c) $K_7 = K \cdot q^7 = 19\,240,50\,\text{Kč}$, tedy úrok je $K_7 - K \doteq 9\,240\,\text{Kč}$,

   (d) $K_n = K \cdot q^n$, tedy úrok je $K_n - K = K \cdot (q^n - 1)$.

2. Úrok po pěti letech je $U = K \cdot (q^5 - 1)$. Známe $U = 24\,510\,\text{Kč}$ a též $q = 1,112$, tedy $q^5 - 1 \doteq$ $\doteq 0,700293663$. Pak $K = \frac{U}{q^5-1} = \frac{24\,510}{0,700293663}\,\text{Kč} \doteq 35\,000\,\text{Kč}$.

3. (a) 3 129 Kč, (b) 6 345 Kč, (c) $n = 6$, (d) $n = 4$, (e) 13 000 Kč, (f) 52 000 Kč, (g) 7,9 %, (h) 8,2 %.

4. (a) $U = 100\,000 \cdot (1,096 \cdot 1,1 \cdot 1,102^2 \cdot 1,103^2 - 1)\,\text{Kč} \doteq 100\,000 \cdot 0,78122\,\text{Kč} \doteq 78\,121,90\,\text{Kč}$.

   (b) Davidův postup dá $U = 100\,000 \cdot (1,101^6 - 1)\,\text{Kč} = 78\,124,60\,\text{Kč}$, což je o 2,70 Kč více než skutečná hodnota.

5. $K_1 = K \cdot q_1 - v = 100\,300\,\text{Kč}$, $K_2 = K_1 \cdot q_2 - v = 100\,530\,\text{Kč}$, $K_3 = K_2 \cdot q_3 - v = 100\,784\,\text{Kč}$, $K_4 = K_3 \cdot q_4 - v = 100\,459\,\text{Kč}$, $K_5 = K_4 \cdot q_5 - v = 100\,504\,\text{Kč}$, $K_6 = K_5 \cdot q_6 - v = 100\,855\,\text{Kč}$.

   Pan Vrba na úroku získal $6v + 1\,855\,\text{Kč}$=$60\,855\,\text{Kč}$.

2.3.3 Spojité úrokování

Spojité úrokování bude vysvětleno později. Začneme příkladem.

Příklad 29

Jakub, syn pana Černého z příkladu 27(a) navrhl otci výnosnější způsob šetření. Otec slíbil synovi, že peníze, o něž se mu povede očekávaný úrok 3 382 Kč zvýšit, budou jeho. Synova idea byla prostá – peníze i s úrokem vybrat každého půl roku a tím rychleji zvyšovat jistinu, ze které přichází úrok. Rozpracujte tuto Jakubovu myšlenku.

Řešení

Operaci „připsání úroku“ provede Jakub každého půl roku. Pak bude úročitel pouze $q = 1,051$, ale bude aplikován šestkrát. Tedy $K_6 = K \cdot q^6 = 10\,000 \cdot 1,051^6\,\text{Kč} \doteq 13\,477,70\,\text{Kč}$. Úrok bude 3 477 Kč, což je o 95 Kč více, než původní řešení.

Jakub uvažoval dále: když nechám úroky připsat každý měsíc, bude úročitel $q = 1 + \frac{0{,}102}{12} = 1,0085$, ale připíše se 36krát. Tedy $K_{36} = K \cdot q^{36} = 10\,000.1,0085^{56}\,\text{Kč} \doteq 1\,3562,30\,\text{Kč}$. Úrok bude 3 562 Kč, což je již o 180 Kč více, než byl úrok původní. A což kdybychom nechali připsat úrok každý týden? Nebo dokonce každý den? Nebo každou hodinu? Jaký by byl celkový úrok pak?

Poslední otázky přenecháme čtenáři do úloh a zde se zaměříme na to hlavní, co trik s častým připisováním úroku přináší.

Jestliže rok rozdělíme na m stejných částí a po uplynutí každé této části necháme připsat úrok, bude úročitel $q = 1 + \frac{0{,}102}{m}$ a výsledná suma konta po třech letech bude $K_v = K \cdot q^{3m}$. Budeme-li číslo m zvyšovat, bude se hodnota K_v limitně blížit číslu $K \cdot \mathrm{e}^{3p}$, kde e je tzv. Eulerova konstanta.

$$\mathrm{e} = \lim[n \to \infty](1 + \tfrac{1}{n})^n = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + \ldots \doteq 2,72.$$

Proč tomu tak je, se čtenář dozví později na přednášce z matematické analýzy. Zde se omezíme na aplikaci tohoto důležitého teoretického poznatku.

Jakubova chytrá myšlenka by na jedné straně vedla k jistému zvýšení úroku vkladatele, na druhé straně by značně zatížila administraci banky. Aby k tomu nedocházelo, může banka nabídnout klientovi jiný způsob úrokování, tzv. spojité úrokování, které se počítá vzorcem

$$K_t = K_0 \cdot q^t.$$

Vysvětlení: Jistina K_0 se při úrokové míře $p = q - 1$, za dobu t let (t může být jakékoli kladné reálné číslo) zvýší na obnos K_t.

Úlohy

1. Zodpovězte tři otázky z řešení příkladu 29.

2. Tři ze čtyř čísel K_0, p, t, K_t známe, najděte číslo čtvrté. Počítejte s přesností na 1 Kč a úrokovou míru s přesností na desetinu procenta.

	a	b	c	d	e	f	g	h
K_0	54 000	10 000		25 000	40 000		49 000	17 000
p	8,1		7,9		7,3	8,2	9,2	
t	8	1	11	7		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{3}$
K_t		10 680	87 704	41 747	40 766	94 855	51 001	19 987

3. Při jaké úrokové míře p se vklad K_0 při spojitém úrokování zdvojnásobí za (a) 6 let, (b) 7 let, (c) 8 let, (d) 9 let, (e) 10 let, (f) 11 let? Číslo p zjistěte s přesností na tisíciny procenta.

4. Vytvořte tabulku, která udává, za jak dlouho (r – roky, m – měsíce, d – dny) se vklad zdvojnásobí při spojitém úrokování a dané úrokové míře $p = 7,0; 7,1; 7,2; \ldots 10,8; 10,9$ procent.

Výsledky

1. Nechť K_v je výše vkladu po třech letech, „připsání úroku" se dělá jednou za dobu d.

   $d = 1$ týden: $K_v = 10\,000 \cdot (1 + \frac{0,102}{52})^{156}$ Kč $\doteq 13\,575,70$ Kč;

   $d = 1$ den: $K_v = 10\,000 \cdot (1 + \frac{0,102}{365})^{1095}$ Kč $\doteq 13\,579,20$ Kč;

   $d = 1$ hodina: $K_v = 10\,000 \cdot (1 + \frac{0,102}{8760})^{26280}$ Kč $\doteq 13\,579,80$ Kč.

2. (a) 100 693 Kč, (b) 6,8 %, (c) 38 000 Kč, (d) 7,6 %, (e) $\frac{7}{26}$ roku (z 52 týdnů) = 14 týdnů, (f) 90 000 Kč, (g) $\frac{166}{365}$ roku (z 52 týdnů) = 166 dní, (h) 10,2 %.

3. (a) 12,246 %, (b) 10,409 %,(c) 9,051 %, (d) 8,006 %, (e) 7,177 %, (f) 6,504 %.

4. Řešení je v následující tabulce:

p	r	m	d		p	r	m	d		p	r	m	d		p	r	m	d
7,0	10	2	29		8,0	9	0	3		9,0	8	0	16		10,0	7	3	9
7,1	10	1	8		8,1	8	10	25		9,1	7	11	16		10,1	7	2	14
7,2	9	11	20		8,2	8	9	17		9,2	7	10	16		10,2	7	1	20
7,3	9	10	2		8,3	8	8	10		9,3	7	9	17		10,3	7	0	26
7,4	9	8	16		8,4	8	7	4		9,4	7	8	18		10,4	7	0	3
7,5	9	7	1		8,5	8	5	30		9,5	7	7	20		10,5	6	11	10
7,6	9	5	17		8,6	8	4	25		9,6	7	6	23		10,6	6	10	17
7,7	9	4	4		8,7	8	3	22		9,7	7	5	26		10,7	6	9	26
7,8	9	2	23		8,8	8	2	19		9,8	7	4	30		10,8	6	9	4
7,9	9	1	12		8,9	8	1	17		9,9	7	4	4		10,9	6	8	13

Kapitola 3

Pravděpodobnost

3.1 Tři hádanky

Hádanka 1. Budeme házet hrací kostkou tak dlouho, dokud nepadne šestka. Jakmile padne šestka, hra končí. Andula tvrdí, že nejpravděpodobnější je, že hra končí hned po prvním hodu. Bohouš tvrdí, že nejpravděpodobnější je, že hra končí po třetím hodu. Cyril tvrdí, že nejpravděpodobnější je, že hra končí po čtvrtém hodu. Drahuše tvrdí, že žádný z nich nemá pravdu. Kdo má pravdu?

Hádanka 2. V jedné ze tří skříněk je ukryta stokoruna. Zaplatíte-li 60 Kč, můžete o stokorunu hrát. Hraje se podle těchto pravidel: Jednu skříňku – označme ji A – dáte bokem. Bankéř, který ví, ve které skříňce stokoruna je, otevře jednu ze dvou zbylých skříněk, ve které stokoruna není – tu skřínku označme B. Nakonec se vy rozhodnete, zda otevřete skřínku A, nebo C. Když uhodnete, stokoruna je vaše, když ne, vašich 60 korun je pryč.
Myslíte, že se na této hře dá vydělat (když se hraje dosti dlouho)? Nebo je to nutně výdělečný podnik pro bankéře?

Hádanka 3. Paní Anna McRoony vyčítala synovi Danovi, že v uplynulém roce čtyřikrát častěji jel z práce ke své přítelkyni než k ní. Dan se ohradil, že přesně dodržuje pravidla, na nichž se domluvili. Z práce, kterou končívá mezi 16. a 17. hodinou, jde přímo na stanici metra a nasedne do prvního vlaku, který přijede. Je-li to vlak na sever, přijede k matce. Je-li to vlak na jih, jede k přítelkyni. Matka synovi nevěří. Říká, že přece vlaky jezdí stejně hustě oběma směry. Obviňuje syna, že zná jízdní řád, a rychlost chůze z práce k metru přizpůsobí tak, aby chytal vlak na jih. Dan rozhodně popírá, že by znal jízdní řád a jakkoli podváděl. Věříte Danovi? Myslíte, že lže, nebo připouštíte, že mluví pravdu?

3.2 Úvod

Tematický celek „Pravděpodobnost“ je úzce provázán s celkem „Kombinatorika“ a přejímá od něj, i když snad ve zmenšené míře, jeho neoblíbenost. Na rozdíl od kombinatoriky, která zatěžuje hlavu člověka čtyřmi vzorci, obsahuje pravděpodobnost vzorec jediný:

$$P = \frac{X}{Y}, \tag{3.1}$$

kde P je pravděpodobnost jevu, X je počet příznivých případů a Y je počet všech možných případů.

Vzorec (3.1) se nazývá klasická definice pravděpodobnosti. Vznikl v 18. století. Je to zároveň návod na výpočet pravděpodobnosti zkoumaného jevu. Ukazuje, že základní strategie řešení úloh z pravděpodobnosti je dána trojicí otázek: *Jak vypadá jeden konkrétní případ? Jak vypadá množina všech možných případů? Které z nich jsou příznivé?*

Úmluva:
• Pravděpodobnost toho, že nastane jev A, značíme $P(A)$. Když nehrozí nebezpečí nedorozumění, píšeme někdy jen P. Jev „při hodu mince padne rub“ značíme R. Podobně L pro „líc“.
• Při házení kostkou pravděpodobnost jevu „padne m ok“ značíme $P(m)$. Házíme-li více kostkami, pak „padne m ok“ značí, že součet ok na všech hozených kostkách je m.
• Balíčkem karet rozumíme 32 karet ve čtyřech barvách: žaludy, zelené, srdce, koule, každá v osmi výškách: sedma, osma, devítka, desítka, spodek, svršek, král, eso.
• Taháme-li tři kuličky z osudí, ve kterém jsou kuličky bílé i modré, pak BBM značí jev „dvě z tažených kuliček jsou bílé, jedna modrá“. Analogicky chápeme znaky MM, BB, BM apod.

Ilustrace:
– Házíme-li mincí, pak $P(R) = \frac{1}{2}$, neboť možné případy jsou dva, R a L, a příznivý je jeden.
– Házíme-li hrací kostkou, pak $P(1 \text{ nebo } 2) = \frac{1}{3}$, neboť možných případů je 6 a z nich příznivé jsou dva.
– Jsou-li v osudí 3 bílé a 2 modré kuličky, pak při vytažení jedné kuličky z osudí je $P(\mathrm{B}) = \frac{3}{5}$, neboť všech možností je 5 a příznivé jsou tři.
– Taháme-li z balíčku karet jednu kartu, pak $P(\text{žalud}) = \frac{1}{4}$, neboť karet je 32, žaludů 8 a $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Dvě poznámky:
• První se týká vztahu mezi vzorcem (3.1) a skutečností. Zcela nepravdivá je například tato úvaha: protože při hodu mincí máme poloviční pravděpodobnost, že padne R a poloviční pravděpodobnost, že padne L, pak při dvou hodech nutně jednou padne R a jednou L. Víme, že ve skutečnosti tomu tak není.
Vztah vzorce a skutečnosti je zaručen pouze pro veliké počty. Například, když hodíme mincí miliónkrát, je velice pravděpodobné, že R padne více než 450 000 krát.
Zákon shody teoretické pravděpodobnosti (3.1) a skutečnosti zformuloval švýcarský matematik Jacob Bernoulli (1 654 – 1 705) a je znám pod jménem zákon velkých čísel.

• Druhá poznámka se týká důležitého předpokladu, který jsme zatím zamlčeli. Představte si, že budete házet krabičkou od sirek. Ta má, podobně jako krychle, šest stěn. Ze vzorce by pak mělo plynout, že pravděpodobnost toho, že při náhodném hodu padne krabička na plocho, je stejná jako pravděpodobnost toho, že padne na výšku – vždy je to $\frac{1}{3}$. Samozřejmě je to úvaha chybná. Upozorňuje nás však na důležitou věc. Vzorec (3.1) platí za předpokladu, že:

$$\text{všechny možné případy jsou stejně pravděpodobné.} \tag{3.2}$$

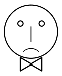
Nejsou-li případy stejně pravděpodobné, nelze vzorce (3.1) použít.

3.3 Úlohy jednorázové

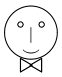
Příklad 1

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma mincemi padne na obou mincích rub?

Řešení



Při hodu dvěma mincemi nastávají tři případy: dva ruby; jeden rub, jeden líc; dva líce. Tedy počet všech případů je 3 a počet příznivých případů je 1. Proto pravděpodobnost toho, že na obou mincích padne rub, je $\frac{1}{3}$.



Řešení bylo ukvapené. Neprověřili jsme platnost podmínky (3.2).
Chybně jsme předpokládali že tři uvedené jevy jsou stejně pravděpodobné. Není tomu tak. Představme si, že první z mincí je korunová a druhá dvoukorunová. Pak je zřejmé, že případ „na korunové minci padl R a na dvoukorunové L“ – označme jej RL – je jiný než případ „na korunové minci padl L a na dvoukorunové R“ – označme jej LR.

Tedy při hodu dvěma mincemi nastávají nikoli tři, ale čtyři případy: RR, RL, LR, LL. Pak ovšem $P(RR) = \frac{1}{4}$.

Výsledek: $P(RR) = \frac{1}{4}$

Výzva 1: Vezměte dvě mince, korunovou a dvoukorunovou, a udělejte 100 hodů touto dvojicí. Každý hod evidujte v tabulce (viz tabulka 3.1). Pak zjistěte, kolikrát se objevil který případ. Dále zjistěte, kolikrát padl rub na (a) korunové minci, (b) dvoukorunové minci. Evidujte rozdíly mezi teoretickou pravděpodobností a realitou (četností).

RR	RL	LR	LL

Tabulka 3.1:

Příklad 2

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padnou čísla, jejichž rozdíl je 1?

Řešení

Vhled: Důležité je uvědomit si, že kostky jsou různé. Proto případ „na první kostce padlo číslo 5, na druhé 4“ je jiný, než případ „na první kostce padlo číslo 4, na druhé 5“.

Strategie: Šikovnost řešení závisí na dobře voleném způsobu zápisu. Musí být stručný a jasný. Takový zápis je popsán následující úmluvou.

Úmluva: Při hodu dvěma kostkami budeme vždy předpokládat, že tyto jsou barevně odlišeny. První B je bílá, druhá M je modrá. Pak případ „na modré kostce padlo číslo p, na bílé q“ budeme značit „p,q“, nebo podrobněji „(p,q)“.

Realizace: Všech možných případů je 36. Jsou popsány tabulkou 3.2. Je zřejmé, že každé dva z těchto případů jsou stejně pravděpodobné.

Příznivých případů je deset: (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4) a (6,5). V tabulce jsou uloženy těsně nad a těsně pod hlavní diagonálou.

Výsledek: $P(\text{rozdíl hozených čísel je 1}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} = 0{,}2\overline{7}$.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Tabulka 3.2:

Úlohy

1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi mincemi padne R (a) aspoň jednou, (b) nejvýše jednou, (c) právě jednou?

2. Označme $P(n)$ pravděpodobnost jevu „při hodu dvěma kostkami padne součet ok n“. Zjistěte $P(n)$ pro všechna přirozená čísla n.

3. Zjistěte, který z jevů A, B je více pravděpodobný při hodu dvěma kostkami: A je jev, kdy součet čísel je prvočíslo, B je jev, kdy rozdíl čísel je více než 2.

4. V osudí jsou dvě bílé a tři modré kuličky. Z osudí poslepu (tedy náhodně) vybereme dvě z nich. Jaká je pravděpodobnost, že budou (a) stejné, (b) různé barvy?

5. Z balíčku karet náhodně vybereme dvě karty. Určete pravděpodobnost jevů A, B, C a D: Jev A znamená, že „obě jsou srdce“, B – „žádná není eso“, C – „mají stejnou výšku“, D – „mají různou výšku“.

6. V osudí je patnáct čísel 1, 2, 3,. . . , 15. Náhodně vybereme dvě z nich. Jaká je pravděpodobnost, že součet w obou tažených čísel je dělitelný číslem 6?

7. (a) Na desce je pravidelný šestiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Ve vrcholu A_1 je kámen. Hodíme hrací kostkou a v přirozeném směru postoupíme o tolik vrcholů, kolik ok padlo. Například padne-li dvojka, postoupíme na A_3. Označme $P(A_i)$ pravděpodobnost jevu „po třech krocích budeme na poli A_i“. Určete $P(A_5)$.

   (b) Stejnou úlohu řešte pro pravidelný devítiúhelník $A_1A_2 \dots A_9$.

Výsledky

1. Všech případů je osm: RRR, RRL, RLR, LRR, LLR, LRL, RLL, LLL. Každé dva jsou stejně pravděpodobné. Z nich příznivé jsou (a) všechny kromě LLL, (b) čtyři poslední, (c) tři: LLR, LRL, RLL.

   Výsledek: (a) $P = \frac{7}{8} = 0,875$, (b) $P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, (c) $P = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

2. Z tabulky 3.2 okamžitě vidíme, že všech možností je 36. Součet 1 padnout nemůže, součet 2 může padnout jediným způsobem $(1+1)$, součet 3 může padnout dvěma způsoby $(1+2)$ a $(2+1),\ldots$, součet 11 může padnout dvěma způsoby $(5+6)$ a $(6+5)$ a konečně součet 12 může padnout jediným způsobem $(6+6)$. Tedy $P(1)=0$, $P(2)=P(12)=\frac{1}{36}=0{,}02\overline{7}$, $P(3)=P(11)=\frac{1}{18}=0{,}0\overline{5}$, $P(4)=P(10)=\frac{1}{12}=0{,}08\overline{3}$, $P(5)=P(9)=\frac{1}{9}=0,\overline{1}$, $P(6)=P(8)=\frac{5}{36}=0,13\overline{8}$, $P(7)=\frac{1}{6}=0,1\overline{6}$ a dále $P(13)=P(14)=\cdots=0$.

3. Označení: $P_s(n)=P(\text{součet čísel na obou kostkách je } n)$ a $P_r(n)=P(\text{rozdíl čísel na obou kostkách je } n)$.

   Výpočet $P(A)$: Součet 2 lze získat pouze jako $(1+1)$, proto je $P_s(2)=\frac{1}{36}$. Součet 3 lze získat dvěma způsoby jako $(1+2)$ a $(2+1)$, tedy $P_s(3)=\frac{2}{36}$. Podobně najdeme $P_s(5)=\frac{4}{36}$, $P_s(7)=\frac{6}{36}$ a $P_s(11)=\frac{2}{36}$. Tedy $P(A)=\frac{1+2+4+6+2}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}=0{,}41\overline{6}$.

   Výpočet $P(B)$: Platí $P_r(5)=\frac{2}{36}$, $P_r(4)=\frac{4}{36}$, $P_r(3)=\frac{6}{36}$, tedy $P(B)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}\doteq 0{,}33333$ je součet těchto tří čísel.

   Odpověď: Jev A je více pravděpodobný než jev B.

4. Označení: Bílé kuličky označme 1 a 2, modré označme 3, 4 a 5. Případ „tažena byla dvojice kuliček 2, 3“ označme „23“.

   Výpočet: Všech možných případů je $C(2{,}5)=10$.

   (a) Jev BB nastává pouze v případě 12, jev MM ve třech případech: 34, 35, 45. Tedy $P(\text{stejné})=P(BB)+P(MM)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=0{,}4$.

   (b) Jev BM nastává ve zbylých šesti případech, tedy $P(\text{různé})=P(BM)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=0{,}6$.

5. Všech možných případů je $C(2{,}32)=\frac{32\cdot 31}{2}=496$.

   Jev A: Srdcí je osm, proto případů, že obě vybrané karty jsou srdce, je $C(2{,}8)=28$. Tedy $P(A)=\frac{28}{496}=\frac{7}{124}\doteq 0{,}05645$.

   Jev B: Esa jsou čtyři. Když je z balíčku odstraníme, zůstane 28 „ne-es“. Proto výběrů „obě jsou „ne-esa““ je $C(2{,}28)=378$. Tedy $P(B)=\frac{378}{496}=\frac{189}{248}\doteq 0{,}762097$.

   Jev C: Sedmy jsou čtyři. Proto případů, že obě vybrané karty jsou sedmy, je $C(2{,}4)=6$. Podobně každý z případů „obě vybrané karty jsou osmy“,..., „obě vybrané karty jsou esa“ nastává právě šestkrát. Úhrnem je to $8\cdot 6=48$ případů. Tedy $P(C)=\frac{48}{496}=\frac{3}{31}\doteq 0{,}09677$.

   Jev D: Využijeme předchozí výsledek. Jevy C a D úzce souvisí. Tvoří rozklad množiny všech případů. Každý tah dvou karet patří buď do jevu C (tažené karty mají stejnou výšku) nebo do jevu D (tažené karty mají různou výšku). Žádný případ nemůže patřit do C, D zároveň. Protože případů jevu C bylo 48, má jev D případů $496-48=448$. Pak $P(D)=\frac{448}{496}\doteq 0{,}90323$.

6. Všech možných výběrů je $C(2{,}15)=105$. Výběr je příznivý, právě když w je jedno z čísel 6, 12, 18 a 24. Číslo 6 lze vybrat dvěma způsoby: $(1+5)$ a $(2+4)$. Číslo 12 lze vybrat pěti způsoby: $(1+11)$, $(2+10)$, $(3+9)$, $(4+8)$ a $(5+7)$. Podobně číslo 18 lze vybrat šesti způsoby a číslo 24 třemi způsoby. Příznivých výběrů je tedy $2+5+6+3=16$. Proto hledaná pravděpodobnost je $P=\frac{16}{105}\doteq 0{,}15238$.

7. Množina jevů „tři hody kostkou a příslušné přesunutí kamenu“ má $6^3=216$ prvků. Součet ok ve všech třech hodech může být nejméně 3 a nejvíce 18.

(a) Hledáme trojice hodů, v nichž je součet 4, 10 nebo 16. Součet 4 může padnout třemi způsoby: (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1). Podobně součet 10 může padnou 27 různými způsoby a součet 16 šesti různými způsoby. Proto $P(A) = \frac{3+27+6}{216} = \frac{1}{6}$.

(b) Hledáme trojice hodů v nichž je součet 4 nebo 13. Součet 4 může padnout třemi způsoby, součet 13 dvaceti jedna způsoby. Proto $P(A) = \frac{3+21}{216} = \frac{1}{9}$.

Jiné řešení: (a) Vrcholů, na které se může kámen po třech hodech dostat, je 6. Tedy pravděpodobnost, že se dostane na některý konkrétně zvolený vrchol, je $\frac{1}{6}$.

(b) Vrcholů, na které se může kámen po třech hodech dostat, je 9. Tedy pravděpodobnost, že se dostane na některý konkrétně zvolený vrchol, je $\frac{1}{9}$.

Odkud víme, že případy „dostat se třemi hody na vrchol A_1“ a „dostat se třemi hody na vrchol A_2“ jsou stejně pravděpodobné? Důležitou podmínku (3.2) jsme zapomněli prověřit. I když víme z předchozího výpočtu, že výsledky jsou pravdivé, způsob jejich získání v druhém řešení byl nekorektní.

Výzva 2: V situaci úlohy 7 na straně 54 zjistěte pravděpodobnosti
(a) $P(A_1),\ldots, P(A_6)$, (b) $P(A_1),\ldots, P(A_9)$.

<u>Poznámka</u>: Jevy C a D z řešení úlohy 5 jsou doplňkové (komplementární). S doplňkovými jevy jsme se setkali i v úloze 4. Jevy „stejné“ a „různé“ byly doplňkové.
Obecně, dva jevy nazýváme doplňkové, jestliže každý případ patří do právě jednoho z těchto jevů.

3.4 Úlohy náročnější – využití znalostí z kombinatoriky

Příklad 3

> V osudí je pět bílých a šest modrých kuliček. Vybereme náhodně čtyři z nich. Jaká je pravděpodobnost, že nastane jev $BBMM$, tj. dvě budou bílé a dvě modré?

Řešení

<u>Vhled:</u> Bílé kuličky označme 1, 2, 3, 4 a 5. Modré kuličky označme 6, 7, 8, 9, 10 a 11. Výběr čtveřice kuliček bude příznivý, právě když dvě kuličky budou z bílé množiny a dvě z modré. Příznivých výběrů je pak $b \cdot m$, kde b je počet bílých dvojic a m je počet modrých dvojic.

<u>Strategie</u>: Najdeme postupně tři čísla: v – počet všech možností výběru čtveřice, b – počet všech možných bílých dvojic a m – počet všech možných modrých dvojic. Všech příznivých čtveřic pak bude $b \cdot m$ a hledaná pravděpodobnost bude $P = \frac{b \cdot m}{v}$.

<u>Realizace</u>: $v = C(4,11) = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330$, $b = C(2,5) = 10$, $m = C(2,6) = 15$.

<u>Výsledek</u>: $P(BBMM) = \frac{10 \cdot 15}{330} = \frac{5}{11} = 0{,}\overline{45}$.

Příklad 4

> V osudí je x bílých a pět modrých kuliček. Pravděpodobnost, že při náhodném vytažení dvojice budou obě kuličky různé barvy, je $\frac{11}{24}$.
> (a) Zjistěte x. (b) Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném vytažení trojice kuliček bude právě jedna modrá?

Řešení

Vhled: (a) V osudí je $x + 5$ kuliček. Všech výběrů dvojice je $C(2,x + 5)$. Při výběru jediné kuličky může jev B nastat v x případech a jev M v pěti případech. Tedy při výběru dvojice jev BM, tj. jev „různé“, nastává $5x$-krát. Proto $P(\text{různé}) = \frac{5x}{C(2,x+5)} = \frac{11}{24}$.
(b) Jev BBM nastává v $b \cdot m$ případech, kde b je počet možných výběrů dvojice z x kuliček a m je počet možných výběrů jedné kuličky z pěti kuliček.

Realizace: (a) Řešíme rovnici $\frac{5x}{C(2,x+5)} = \frac{11}{24}$. Protože $C(2,x+5) = \frac{(x+5)(x+4)}{2}$, lze danou rovnici přepsat do tvaru $11x^2 - 141x + 220 = 0$. Tato rovnice má právě jeden kořen celočíselný: $x = 11$. Dosazením prověříme, že je to výsledek správný.

(b) Počet možných výběrů dvojice BB je $b = C(2,11) = 55$. Počet možných M z pěti kuliček je $m = 5$. Tedy jev BBM nastává v 275 případech. Všech možných případů výběru trojice ze 16 kuliček je $C(3,16) = 560$. Tedy $P(BBM) = \frac{275}{560} = \frac{55}{112} \doteq 0{,}49107$.

Výsledek: $x = 11$ a $P(BBM) \doteq 0,49107$.

Příklad 5

Z číslic 1, 2, 3, 4 a 5 vybereme tři různé a náhodně z nich vytvoříme trojciferné číslo XYZ. Zjistěte (a) $P(2|XYZ)$, tj. pravděpodobnost jevu „číslo XYZ je sudé“ a (b) $P(3|XYZ)$, tj. pravděpodobnost jevu „číslo XYZ je dělitelné třemi“.

Řešení I

Vhled: Všech možných čísel XYZ je $V(3,5)$.
(a) Vytvořené trojciferné číslo XYZ je sudé, právě když $Z = 2$ nebo $Z = 4$. Ptáme se, kolik je trojciferných čísel, pro něž $Z = 2$. Těch je $V(2,4)$, tj. tolik, kolik je dvouciferných čísel XY, kde X, Y jsou různé číslice vybrané z číslic 1, 3, 4, 5. Podobně pro případ $Z = 4$.
(b) Vytvořené trojciferné číslo XYZ je dělitelné třemi, právě když součet $S = X + Y + Z$ je dělitelný třemi, tj. S je jedno z čísel 6, 9, 12.

Realizace: Všech případů je $V(3,5) = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
(a) Příznivých případů je $2 \cdot V(2,4) = 24$, neboť $V(2,4) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$, proto $P(2|XYZ) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.
(b) Lehce zjistíme, že $S = 6$, právě když $\{X,Y,Z\} = \{1,2,3\}$, $S = 9$, právě když $\{X,Y,Z\} = \{1,3,5\}$, nebo $\{X,Y,Z\} = \{2,3,4\}$ a $S = 12$, právě když $\{X,Y,Z\} = \{3,4,5\}$. Existují tedy čtyři různé množiny $\{X,Y,Z\}$, pro které je číslo $S = X + Y + Z$ dělitelné třemi. Z každé takové množiny lze vytvořit $3! = 6$ příznivých případů. Proto všech příznivých případů je $6 \cdot 4 = 24$ a $P(3|XYZ) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

Výsledek: V obou případech je hledaná pravděpodobnost $\frac{2}{5} = 0{,}4$.

Řešení II

Vhled: (a) Položme si otázku. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo XYZ bude mít poslední číslici 1? Zřejmě $P(Z = 1) = \frac{1}{5}$, neboť každá z pěti možností $Z = 1$, $Z = 2$, $Z = 3$, $Z = 4$, $Z = 5$ je stejně pravděpodobná. Tedy $P(Z = 2) = P(Z = 4) = \frac{1}{5}$.

(b) Dělitelnost čísla XYZ třemi nezávisí na pořadí číslic X, Y, Z, ale pouze na množině $\{X,Y,Z\}$. Tuto množinu lze z množiny $\{1,2,3,4,5\}$ vybrat $C(3,5) = 10$ způsoby. Z předchozího víme, že právě čtyři z těchto výběrů jsou příznivé – jsou to výběry $\{1,2,3\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$ a $\{3,4,5\}$.

Realizace: (a) $P(2|XYZ) = P(Z = 2) + P(Z = 4) = \frac{2}{5} = 0{,}4$, (b) $P(3|XYZ) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

Úlohy

1. V osudí je pět bílých a šest modrých kuliček. Vybereme náhodně dvě z nich. Jaká je pravděpodobnost, že budou stejné barvy?

2. Z číslic 1, 2, 3, 4 a 5 náhodně vytvoříme trojciferné číslo XYZ. Číslice X, Y, Z jsou různé. Jaká je pravděpodobnost, že číslo XYZ bude dělitelné (a) čtyřmi, (b) pěti, (c) šesti, (d) sedmi, (e) osmi, (f) devíti, (g) desíti?

3. Z balíčku karet náhodně vybereme pět karet. Zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi (a) nebude ani jeden žalud, (b) bude aspoň jedno eso.

4. Z balíčku karet náhodně vybereme čtyři karty. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude (a) aspoň jeden spodek nebo svršek, (b) aspoň jedno srdce.

5. V osudí je n čísel $1, 2, 3, \ldots, n$, $(n > 1)$. Náhodně vybereme dvě z nich a zjistíme jejich součet w. Víme, že $P(w = 9) = \frac{1}{7}$, tedy pravděpodobnost jevu „$w = 9$“ je $\frac{1}{7}$. Určete všechna n.

6. V osudí je 50 kuliček. Z nich je x bílých a y modrých. Náhodně vybereme tři z nich. Víme, že $P(BBM) = 0{,}435$.

   (a) Zjistěte x i y.

   (b) Jaká je pak pravděpodobnost jevu „při náhodném vytažení trojice kuliček bude právě jedna bílá“?

7. V rovině vyznačíme množinu bodů $\{[a, b]; a, b \in \{0,1,2\}\}$. Z této množiny náhodně vybereme čtyři body. Jaká je pravděpodobnost, že tyto body tvoří vrcholy (a) čtverce, (b) nekonvexního čtyřúhelníka?

8. Z množiny devíti bodů předchozí úlohy náhodně vybereme tři různé body. Jaká je pravděpodobnost, že tyto body (a) leží na přímce, (b) tvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníka?

9. Uvažujeme o čtyřciferných číslech $3AB1$. Zvolte číslici A tak, aby při náhodné volbě číslice B platilo: $P(9|3AB1) = 0{,}2$. Číslice A a B mohou být stejné.

Výsledky

1. Všech možných případů je $C(2{,}11) = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$.

   Řešení I: Možností vybrat dvě bílé kuličky je $C(2{,}5) = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Možností vybrat MM je $C(2{,}6) = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Proto pravděpodobnost jevu BB, resp. MM, je $P(BB) = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$, resp. $P(MM) = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}$.

   Výsledek: $P(\text{stejné}) = P(BB) + P(MM) = \frac{2}{11} + \frac{3}{11} = \frac{5}{11} = 0{,}\overline{45}$.

   Řešení II: Možností vybrat bílou kuličku je pět, možností vybrat modrou kuličku je šest, tedy možností vybrat dvojici BM je $5 \cdot 6 = 30$. Proto $P(\text{různé}) = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}$ a tedy $P(\text{stejné}) =$ $= 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} = 0{,}\overline{45}$.

2. (a) Platí $4|XYZ \Leftrightarrow 4|YZ$. Poslední dvojčíslí YZ je dělitelné čtyřmi právě ve čtyřech případech: $YZ \in \{12{,}24, 32{,}52\}$. Všech dvojčíslí YZ je $V(2{,}5) = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4 = 20$. Příznivé jsou čtyři.

   Výsledek: $P(4|XYZ) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

   (b) Platí $5|XYZ \Leftrightarrow (Z = 0$, nebo $Z = 5)$. Číslici 0 k dispozici nemáme. Tedy $P(5|XYZ) = P(Z = 5) = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

   (c) Platí $6|XYZ \Leftrightarrow (2|Z \wedge 3|S)$, kde $S = X + Y + Z$). Z řešení příkladu 5 víme, že podmínku $3|S$ splňují čtyři množiny $\{X, Y, Z\} \in \{\{1{,}2{,}3\}, \{1{,}3{,}5\}, \{2{,}3{,}4\}, \{3{,}4{,}5\}\}$. Probereme je odděleně:

   - $\{X, Y, Z\} = \{1{,}2{,}3\}$. Podmínku $2|Z$ splňují z možných šesti čísel XYZ této volby pouze dvě – 132 a 312.
   - $\{X, Y, Z\} = \{1{,}3{,}5\}$. Podmínku $2|Z$ nesplňuje žádné z možných čísel XYZ.
   - $\{X, Y, Z\} = \{2{,}3{,}4\}$. Podmínku $2|Z$ splňují čtyři čísla 342, 432, 234 a 324.
   - $\{X, Y, Z\} = \{3{,}4{,}5\}$. Podmínku $2|Z$ splňují dvě čísla 354 a 534.

   Výsledek: $P(6|XYZ) = \frac{2+4+2}{60} = \frac{2}{15} = 0{,}1\overline{3}$.

   (d) Bohužel, žádné kritérium dělitelnosti sedmi neznáme, proto musíme nasadit trpělivost. Například prověříme všech 60 možných čísel XYZ na dělitelnost sedmi. Prověrkou úspěšně projde těchto šest čísel: 154, 231, 245, 315, 413 a 532.

   Výsledek: $P(7|XYZ) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

   (e) Protože $8|XYZ \Rightarrow 4|YZ$, můžeme využít výsledku případu (a). Tedy $8|XYZ$ může nastat pouze v případech $YZ \in \{12{,}32{,}52{,}24\}$. Postupně prověříme tucet čísel: 312, 412, 512, 132, 432, 532, 152, 352, 452, 124, 324, 524. Testem úspěšně projde pět z nich: 312, 512, 432, 152, 352.

   Výsledek: $P(8|XYZ) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3}$.

   (f) Protože $9|XYZ \Leftrightarrow S = 9$ a $S = 9 \Leftrightarrow \{X, Y, Z\} \in \{\{2{,}3{,}4\}, \{1, 3, 5\}\}$ jsou právě dva z $C(3{,}5) = 10$ možných výběrů množiny $\{X, Y, Z\}$ výběrem příznivým.

   Výsledek: $P(9|XYZ) = \frac{2}{10} = 0{,}2$

   (g) Víme, že číslo XYZ je dělitelné 10, právě když $Z = 0$. Číslice 0 ale není mezi nabízenými čísly. Proto tato úloha nemá řešení.

   Z toho, že neexistuje příznivý výběr, neplyne, že úloha nemá řešení, ale že $P(10|XYZ) = 0$, tj. jev $10|XYZ$ nemůže nastat, je nemožný. Úloha tedy řešení má. Řešením je číslo 0.

3. Všech pětic je $C(5{,}32) = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.

   (a) „Ne-žaludů“ je 24, tedy pětic neobsahujících ani jeden žalud je $C(5{,}24) = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$. Tedy $P(\text{žalud ne}) = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{759}{3596} \doteq 0{,}21107$.

   (b) $P(\text{eso ne}) = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{1755}{3596}$ a $P(\text{aspoň jedno eso}) = 1 - P(\text{eso ne}) = \frac{1841}{3596} \doteq 0{,}51196$

4. Všech čtveřic je $C(4{,}32) = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Všech čtveřic neobsahujících žádnou z osmi konkrétních karet je $C(4{,}24) = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Tedy $P(\text{žádný spodek ani svršek}) = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{5313}{17980} \doteq 0{,}29549$ a pak (a) $P(\text{aspoň jeden spodek nebo svršek}) \doteq 1 - 0{,}29549 = 0{,}70451$, a tedy (b) $P(\text{aspoň jedno srdce}) \doteq 0{,}70451$.

5. Vhled: Všech možných výběrů je $C(2,n) = \frac{n(n-1)}{2}$. Příznivé výběry mohou být nanejvýš čtyři: $(1+8)$, $(2+7)$, $(3+6)$ a $(4+5)$. Je-li $n \geq 8$, pak příznivé výběry jsou skutečně čtyři. Když je n menší, výběrů je méně. Když je $n < 5$, pak příznivý výběr není žádný.

   Tedy, je-li $n < 5$, pak $P = 0$. Když $n = 5$, pak všech výběrů je $C(2{,}5) = 10$, příznivý jeden, tedy $P = \frac{1}{10}$. Když $n = 6$, pak všech výběrů je $C(2{,}6) = 15$, příznivé dva, tedy $P = \frac{2}{15}$. Když $n = 7$, pak všech výběrů je $C(2{,}7) = 21$, příznivé tři, tedy $P = \frac{1}{7}$.

   Výsledek: Hledané číslo je $n = 7$.

   Řešení úlohy není úplné. Jedno řešení jsme našli, ale nevíme, zda neexistují ještě další řešení. Ve vyšetřování případů musíme pokračovat. Tedy, je-li $n = 8$, pak všech výběrů je $C(2{,}8) = 28$, příznivé čtyři, tedy $P = \frac{1}{7}$. Když $n = 9$, pak všech výběrů je $C(2{,}9) = 36$, příznivé čtyři, tedy $P = \frac{1}{9}$. Když $n > 9$, pak všech výběrů je víc než 36, příznivé jsou čtyři, a proto P je méně než $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

   Výsledek: Úloha má právě dvě řešení. Jsou to $n = 7$ a $n = 8$.

6. Všech možností je $C(3{,}50) = 19\,600$. Dvojici bílých z počtu x bílých můžeme vytáhnout $C(2,x)$ způsoby. Jednu modrou z počtu y modrých můžeme vytáhnout $y = 50 - x$ způsoby. Tedy trojici BBM mohu vytáhnout $C(2,x)\cdot(50-x)$ způsoby. Proto $P(BBM) = \frac{\frac{x(x-1)}{2}\cdot(50-x)}{19600}$. Podle předpokladu je toto číslo rovno číslu 0,435. Dostáváme kubickou rovnici $x(x-1)(50-x) = 17\,052$. Kubické rovnice zatím řešit neumíme. Jenže v tomto případě ji vyřešit dokážeme, protože hledáme pouze celočíselné kořeny. Jiné nemají pro nás smysl. Navíc víme, že číslo x leží mezi 1 a 50. Stačí tedy postupně dosadit všechna tato čísla a kořeny najdeme. Můžeme ale postupovat rychleji, když využijeme znalostí z aritmetiky. Nejprve uděláme prvočíselný rozklad čísla $17052 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 29$. Tedy jedno z čísel x, $x-1$, $50-x$ je nutně 29. Dosazením zjistíme, že pouze $x = 29$ vyhovuje. Tedy (a) $x = 29$, $y = 21$.

   (b) Všech trojic je $C(3{,}50) = \frac{50\cdot49\cdot48}{6}$. Bílou kuličku lze vybrat 29 způsoby a dvě modré $C(2{,}21)$ způsoby. Tedy příznivých výběrů je $\frac{21\cdot20\cdot29}{2}$. Proto $P(BMM) = \frac{21\cdot10\cdot29}{50\cdot49\cdot8} = \frac{87}{280} \doteq 0{,}31071$.

7. Vhled: Formálně zapsaná množina má těchto devět bodů: [0,0], [1,0], [2,0], [0,1], [1,1], [2,1], [0,2], [1,2], [2,2]. Z devíti bodů lze vybrat $C(4{,}9) = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 126$ čtveřic.

   Realizace: (a) V šesti případech určuje vybraná čtveřice čtverec, proto $P(\text{čtverec}) = \frac{6}{126} = \frac{1}{21} \doteq 0{,}04762$.

   (b) Ve 24 případech určuje tato čtveřice nekonvexní čtyřúhelník, proto $P(\text{nekonvexní}) = \frac{24}{126} \doteq 0{,}19048$.

8. Všech trojic z devíti bodů je $C(3{,}9) = \frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 84$.

   (a) Existují tři typy trojic bodů ležících na přímce: tři svislé trojice $[a,0]$, $[a,1]$, $[a,2]$ pro $a = 0{,}1{,}2$, tři vodorovné trojice $[0,b]$, $[1,b]$, $[2,b]$ pro $b = 0{,}1{,}2$ a dvě úhlopříčky [0,0], [1,1], [2,2] a [0,2], [1,1], [2,0].

   Výsledek: $P(\text{trojice bodů leží na přímce}) = \frac{8}{84} = \frac{2}{21} \doteq 0{,}09524$

   (b) Pravoúhlých trojúhelníků s obsahem $\frac{1}{2}$ je v naší množině šestnáct (viz obrázek 3.1*a*), pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků s obsahem 1 je v naší množině osm (viz obrázek 3.1*b*), pravoúhlých nerovnoramenných trojúhelníků s obsahem 1 je v naší množině šestnáct (viz obrázek 3.1*c*) a pravoúhlé trojúhelníky s obsahem 2 jsou v naší množině čtyři (viz obrázek 3.1*d*).

   Výsledek: $P(\text{pravoúhlý trojúhelník}) = \frac{16+8+16+4}{84} = \frac{11}{21} \doteq 0{,}52381$

Obrázek 3.1:

9. Vhled: Zvolme namátkou $A = 8$. Uvažujeme o pravdivosti výroku $9|38B1$. Za B můžeme volit deset různých číslic. Pouze pro volbu $B = 6$ je daný výrok pravdivý. Tedy $P(9|3AB1) = 0{,}1$. Z ilustrace vidíme, že potřebujeme najít takové A, aby byl výrok $9|38B1$ pravdivý pro dvě různé $B \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

   Realizace: Hledáme A tak, aby číslo $S = 3 + A + B + 1$ bylo dělitelné devíti pro dvě různé B. Protože $S < 23$, existují pouze dvě čísla S dělitelná devíti: $S = 9$ a $S = 18$. Obě tato čísla lze dosáhnout, pouze když bude $A = 5$ a $B = 0$, nebo $B = 9$. Tedy $A = 5$.

Výzva 3: Vracíme se k úlohám 5, strana 58 a 6, strana 54. Jsou dána přirozená čísla n, w. V osudí je n čísel 1, 2, 3, …, n. Náhodně vybereme dvě z nich. Zjistěte číslo $P(n, w)$ označující pravděpodobnost jevu „součet tažených čísel je w“.

Výzva 4: V předchozí situaci předpokládejme, že číslo w je pevně dáno. Najděte n tak, aby hodnota $P(n, w)$ byla maximální.

Problém: Náhodně zvolíme přirozené číslo. Jaká je pravděpodobnost, že to bude (a) sudé číslo, (b) číslo dělitelné třemi, (c) prvočíslo?

3.5 Hrajeme, dokud nenastane jev A

Úmluva: V této části definujeme číslo $C(n,m)$ i pro $m < n$ jako $C(n,m) = 0$.

Příklad 6

Házíme kostkou, dokud nenastane jev „šestka“, tj. padlo číslo šest. Tím hra končí. Pravděpodobnost jevu „hra končí v k-tém kroku“ označme $P_1(k)$. Jev „hra pokračuje do $(k + 1)$-ého kroku (hra k-tým krokem nekončí)“ označme $P_2(k)$. Jev „hra končí nejpozději v k-tém kroku“ označme $P_3(k)$. Napište tabulku čísel $P_1(k)$, $P_2(k)$, $P_3(k)$ pro $k = 1,2,\dots,10$. Tabulku počítejte s přesností na tisíciny.

Řešení

Vhled: V každém kroku platí $P(\text{šestka}) = \frac{1}{6}$ a $P(\text{ne-šestka}) = \frac{5}{6}$. Podívejme se podrobně na průběh prvních čtyř kroků hry. U každého kroku napišme pravděpodobnost P, s níž nastává.

1. krok:	padla šestka, hra končí:	$P = \frac{1}{6}$
	padla „ne-šestka“, hra pokračuje:	$P = \frac{5}{6}$
2. krok:	padla šestka, hra končí:	$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
	padla „ne-šestka“, hra pokračuje:	$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$
3. krok:	padla šestka, hra končí:	$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
	padla „ne-šestka“, hra pokračuje:	$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$
4. krok:	padla šestka, hra končí:	$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
	padla „ne-šestka“, hra pokračuje:	$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$

Z uvedeného vidíme, jak se bude hra dále vyvíjet. Jestliže ani po $k - 1$ hodech nepadne šestka, pak následuje k-tý krok, pro který platí:

k-tý krok:	padla šestka, hra končí:	$P = (\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$
	padla „ne-šestka“, hra pokračuje:	$P = (\frac{5}{6})^{k}$

Realizace: Podívejme se na první řádky horních zápisů. Ty říkají, jak vypadá pravděpodobnost jevu „hra končí v tomto kroku“, tedy jak vypadají čísla $P_1(k)$. Vidíme, že $P_1(k) = (\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$. Podíváme-li se na druhé řádky, vidíme, jak vypadá pravděpodobnost jevu „hra do k-tého kroku nekončí“, tedy jak vypadají čísla $P_2(k)$.
Vidíme, že $P_2(k) = (\frac{5}{6})^k$. K tomuto jevu je doplňkový jev „šestka padne nejpozději v k-tém kroku“. Proto $P_3(k) = 1 - (\frac{5}{6})^k$.

Výsledek: Pro všechna přirozená čísla k platí vztahy $P_1(k) = (\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$, $P_2(k) = (\frac{5}{6})^k$, $P_3(k) = 1 - (\frac{5}{6})^k$.

Hodnoty těchto funkcí pro $k = 1,2,\ldots,10$ jsou dány tabulkou 3.3.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_1(k)$	0,167	0,139	0,116	0,096	0,080	0,067	0,056	0,047	0,039	0,032
$P_2(k)$	0,833	0,694	0,579	0,482	0,402	0,335	0,279	0,233	0,194	0,162
$P_3(k)$	0,167	0,306	0,421	0,518	0,598	0,665	0,721	0,767	0,806	0,838

Tabulka 3.3:

Poznámka: Teď již známe odpověď na Hádanku 1 z odstavce 3.1.

Úlohy

Úlohy 1-14 jsou variace na příklad 6. Vždy je popsána hra a jev, kterým hra končí. Vaším úkolem je pro každé přirozené k určit pravděpodobnosti $P_1(k)$, $P_2(k)$, $P_3(k)$ definované v příkladu 6. Někdy je dán i úkol navíc.

1. Házíme mincí, dokud nenastane jev R.
2. Házíme mincí, dokud nepadne dvakrát po sobě stejný znak, tj. dokud nenastane jev RR, nebo LL.
3. V osudí je deset bílých a jedna modrá kulička. Z osudí postupně taháme kuličku tak dlouho, dokud nenastane jev M. Taženou kuličku pokaždé vracíme do osudí.
4. V osudí je sedm bílých a tři modré kuličky. Z osudí postupně taháme kuličku tak dlouho, dokud nenastane jev M. Taženou kuličku po každém tahu vrátíme zpět do osudí. Navíc zjistěte, pro která k nastává $P_3(k) > 0{,}8$.
5. V osudí je 21 bílých a 11 modrých kuliček. Z osudí postupně taháme kuličku tak dlouho, dokud nenastane jev M. Taženou kuličku pokaždé vracíme zpět do osudí.
6. Z balíčku karet taháme vždy jednu kartu, dokud nenastane jev srdce. Taženou kartu pokaždé vracíme do balíčku. Zjistěte, pro která k nastává $P_3(k) > \frac{1}{2}$.
7. Z balíčku karet taháme vždy jednu kartu, dokud nenastane jev eso. Taženou kartu pokaždé vracíme zpět do balíčku. Zjistěte, pro která k nastává $P_3(k) > \frac{1}{2}$.

8. Z balíčku karet taháme vždy jednu kartu, dokud nenastane jev srdce, nebo eso. Taženou kartu pokaždé vracíme do balíčku. Zjistěte, pro která k nastává $P_3(k) > 0{,}9$.

9. Úlohu 3 řešte v případě, že tažené kuličky do osudí nevracíme.

10. Úlohu 4 řešte v případě, že tažené kuličky do osudí nevracíme.

11. Úlohu 5 řešte v případě, že tažené kuličky do osudí nevracíme.

12. Úlohu 6 řešte v případě, že tažené karty do balíčku nevracíme.

13. Úlohu 7 řešte v případě, že tažené karty do balíčku nevracíme.

14. Úlohu 8 řešte v případě, že tažené karty do balíčku nevracíme.

Výsledky

1. Výsledek: $P_1(k) = (\frac{1}{2})^k$, $P_2(k) = (\frac{1}{2})^k$, $P_3(k) = 1 - (\frac{1}{2})^k$.

2. Vhled: Nejprve najdeme hodnoty $P_1(k)$ pro $k = 1,2,3,\ldots$ Hra po prvním kroku končit nemůže, proto je $P_1(1) = 0$.

   Po druhém kroku nastává jedna ze čtyř stejně pravděpodobných možností: RR, LL, RL, LR. Každá s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. První dvě jsou příznivé, tj. znamenají konec hry, poslední dvě znamenají, že hra pokračuje. Je tedy $P_1(2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

   Po třetím kroku nastává jedna ze čtyř stejně pravděpodobných možností: RLL, LRR, RLR, LRL. Každá s pravděpodobností $\frac{1}{8}$. Opět první dvě znamenají konec hry, poslední dvě znamenají, že hra pokračuje. Tedy $P_1(3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

   Realizace: Z prvních tří kroků je vidět průběh hry. Je charakterizován tím, že počínaje druhým krokem, v každém kroku hra končí s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a pokračuje s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Tedy hodnoty pravděpodobnosti P_1 jsou stejné jako v řešení úlohy 1, jen o jeden krok posunuty: $P_1(1) = 0$, $P_1(2) = \frac{1}{2}$, $P_1(3) = \frac{1}{4}$, $P_1(4) = \frac{1}{8},\ldots$, $P_1(k) = \frac{2}{2^k}$. Proto funkce P_2 i P_3 známe již z řešení úlohy 1.

   Výsledek: $P_1(1) = P_3(1) = 0$ a $P_2(1) = 1$. Pro $k > 1$ je $P_1(k) = \frac{2}{2^k}$, $P_2(k) = \frac{2}{2^k}$, $P_3(k) = 1 - \frac{2}{2^k}$.

3. Vhled: Pravděpodobnost vytažení modré kuličky je $p = \frac{1}{11}$.

   Pravděpodobnost doplňkového jevu „je tažena bílá kulička“ je $q = \frac{10}{11} = 1 - p$. Podívejme se na situaci prvních čtyř kroků.

1. krok:	tažena M, hra končí:	$P_1(1) = p = \frac{1}{11}$
	tažena B, hra pokračuje:	$P_2(1) = q = \frac{10}{11}$.
2. krok:	tažena M, hra končí:	$P_1(2) = q \cdot p = \frac{10}{11^2}$
	tažena B, hra pokračuje:	$P_2(2) = q^2 = (\frac{10}{11})^2$
3. krok:	tažena M, hra končí:	$P_1(3) = q^2 \cdot p = \frac{10^2}{11^3}$
	tažena B, hra pokračuje:	$P_2(3) = q^3 = (\frac{10}{11})^3$

   Zobecněním uvedených vztahů získáme situaci po k-tém kroku.

   Výsledky: Po k-tém krok platí:

k-tý krok: tažena M, hra končí: $P_1(k) = q^{k-1} \cdot p = \frac{10^{k-1}}{11^k}$
tažena B, hra pokračuje: $P_2(k) = q^k = (\frac{10}{11})^k$

Hra skončila nejpozději v k-tém kroku $P_3(k) = 1 - q^k = 1 - (\frac{10}{11})^k$.

4. Vhled: příznivé tahy jsou tři, nepříznivých je sedm. Pravděpodobnost jevu M, kterým hra končí, je tedy $p = \frac{3}{10} = 0,3$ a pravděpodobnost jevu B, jevu doplňkového, je $q = \frac{7}{10} = 0{,}7$. Stejnou úvahou jako v řešení příkladu 6 získáme odpovědi.

   Výsledky: $P_1(k) = q^{k-1} \cdot p = 0{,}7^{k-1} \cdot 0{,}3$, $P_2(k) = q^k = 0{,}7^k$, $P_3(k) = 1 - q^k = 1 - 0{,}7^k$. Konečně $P_3(k) > 0{,}8 \Leftrightarrow k > 4$.

5. Vhled: příznivých tahů je 11, nepříznivých 21. Tedy při zavedeném značení je $p = \frac{11}{32}$, $q = \frac{21}{32}$.

   Výsledky: $P_1(k) = q^{k-1} \cdot p = \frac{11 \cdot 21^{k-1}}{32^k}$, $P_2(k) = q^k = (\frac{21}{32})^k$, $P_3(k) = 1 - q^k = 1 - (\frac{21}{32})^k$.

6. Označme $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$. Pak $P_1(k) = q^{k-1} \cdot p = \frac{3^{k-1}}{4^k}$, $P_2(k) = q^k = (\frac{3}{4})^k$, $P_3(k) = 1 - q^k = 1 - (\frac{3}{4})^k$. Konečně $P_3(k) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow k > 2$.

7. Označme $p = \frac{1}{8}$, $q = \frac{7}{8}$. Pak $P_1(k) = q^{k-1} \cdot p = \frac{7^{k-1}}{8^k}$, $P_2(k) = q^k = (\frac{7}{8})^k$, $P_3(k) = 1 - q^k = 1 - (\frac{7}{8})^k$. Konečně $P_3(k) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow k > 5$.

8. První část řešení je totožná s řešením úlohy 5. Výsledek druhé části: $P_3(k) > 0,9 \Leftrightarrow k > 5$.

9. Vhled: Po prvním tahu zůstává v osudí deset kuliček, po druhém devět kuliček,... Obecně, po k-tém tahu zůstává v osudí $(11 - k)$ kuliček. Tedy pravděpodobnost, že modrou kuličku vytáhnu prvním tahem, je $P_1(1) = P(M) = \frac{1}{11}$. Pravděpodobnost, že ji prvním tahem nevytáhnu, je $P(B) = \frac{10}{11}$. Pravděpodobnost, že ji vytáhnu druhým tahem, je $P_1(2) = P(BM) = \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{11}$. Podobně $P_1(3) = P(BBM) = \frac{1}{11}$, $P_1(4) = \cdots = P_1(11) = \frac{1}{11}$. Dále $P_1(k) = 0$ pro všechna $k > 11$.

   Pravděpodobnosti P_3 umíme najít pomocí pravděpodobností P_1: $P_3(1) = P_1(1) = \frac{1}{11}$, $P_3(2) = P_1(1) + P_1(2) = \frac{2}{11}$, $P_3(3) = P_1(1) + P_1(2) + P_1(3) = \frac{3}{11}$,... Zbytek je evidentní.

   Výsledky: Pro $k > 11$ je $P_1(k) = P_2(k) = 0$ a $P_3(k) = 1$.

   Pro $k = 1, \ldots, 11$ je $P_1(k) = \frac{1}{11}$, $P_2(k) = 1 - \frac{k}{11}$, $P_3(k) = \frac{k}{11}$.

10. Vhled: Počítáme funkci P_1: $P_1(1) = P(M) = \frac{3}{10}$, $P_1(2) = P(BM) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}$, tj. nejprve je tažena B, pak M, $P_1(3) = P(BBM) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8}$, $P_1(4) = P(BBBM) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}$.

    Nalezené vztahy můžeme zapsat i pomocí faktoriálů: $P_1(4) = P(BBBM) = 3 \cdot \frac{7!}{4!} \cdot \frac{6!}{10!}$. V tomto zápise pokračujeme:

    $P_1(5) = P(BBBBM) = 3 \cdot \frac{7!}{3!} \cdot \frac{5!}{10!}$

    $P_1(6) = P(BBBBBM) = 3 \cdot \frac{7!}{2!} \cdot \frac{4!}{10!}$

    $P_1(7) = P(BBBBBBM) = 3 \cdot \frac{7!}{1!} \cdot \frac{3!}{10!}$

    $P_1(8) = P(BBBBBBBM) = 3 \cdot \frac{7!}{0!} \cdot \frac{2!}{10!}$ (připomeňme, že $0! = 1$)

    $P_1(k) = 0$ pro $k > 8$ (protože hra končí nejpozději osmým krokem)

    Způsob výpočtu funkce P_2 budeme ilustrovat na čísle $P_2(4)$. Teď nám nejde o proces, jde nám o momentální stav. Všech možností je tolik, kolik různých „slov“ lze sestavit ze tří písmen M

a sedmi písmen B. To je $C(3{,}10) = C(7{,}10) = 120$. Příznivé je slovo, které začíná skupinou $BBBB$. V těch a jen v těch případech hra končí ne dříve než v pátém kroku. Příznivá slova mají tedy tvar $BBBBX_1X_2\dots X_6$, kde tři z písmen X_1, X_2, …, X_6 jsou M a tři B. Těch slov je $C(3{,}6) = 20$. Tedy $P_2(4) = \frac{C(3,6)}{C(3,10)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$. Zobecněním poslední úvahy najdeme $P_2(k)$. Konečně $P_3(k) = 1 - P_2(k)$.

<u>Výsledky:</u> Pro $k > 8$ je $P_1(k) = P_2(k) = 0$ a $P_3(k) = 1$. Pro $k = 1, \dots, 8$ je $P_1(k) = = 3 \cdot \frac{7!}{(8-k)!} \cdot \frac{(10-k)!}{10!}$, $P_2(k) = \frac{C(3,10-k)}{C(3,10)}$ a $P_3(k) = 1 - \frac{C(3,10-k)}{C(3,10)}$.

11. <u>Vhled:</u> Počítáme funkci P_1. Platí:

$P_1(1) = P(M) = \frac{11}{32}$

$P_1(2) = P(BM) = \frac{21}{32} \cdot \frac{11}{31}$ (tj. nejprve je tažena B, pak M)

$P_1(3) = P(BBM) = \frac{21}{32} \cdot \frac{20}{31} \cdot \frac{11}{30} = 11 \cdot \frac{21!}{19!} \cdot \frac{29!}{32!}$

$P_1(4) = P(BBBM) = 11 \cdot \frac{21!}{18!} \cdot \frac{28!}{32!}$

$P_1(5) = P(BBBBM) = 11 \cdot \frac{21!}{17!} \cdot \frac{27!}{32!}$ atd.

Funkci P_2 lze počítat stejným způsobem jako v řešení úlohy 10. Zvolíme však jiný postup, abychom ukázali další důležitou kombinatorickou myšlenku. Opět počítáme číslo $P_2(4) = = P(BBBB)$.

Postupně dostáváme:

$P_2(1) = P(B) = \frac{21}{32} = \frac{C(1,21)}{C(1,32)}$

$P_2(2) = P(BB) = \frac{21}{32} \cdot \frac{20}{31} = \frac{C(2,21)}{C(2,32)}$

$P_2(3) = P(BBB) = \frac{21}{32} \cdot \frac{20}{31} \cdot \frac{19}{30} = \frac{C(3,21)}{C(3,32)}$

$P_2(4) = P(BBBB) = \frac{21}{32} \cdot \frac{20}{31} \cdot \frac{19}{30} \cdot \frac{18}{29} = \frac{C(4,21)}{C(4,32)}$

<u>Výsledky:</u> Pro $k > 22$ je $P_1(k) = P_2(k) = 0$ a $P_3(k) = 1$. Pro $k = 1, \dots, 22$ je $P_1(k) = = P(B\dots BM) = 11 \cdot \frac{21!}{(22-k)!} \cdot \frac{(32-k)!}{32!}$, $P_2(k) = \frac{C(11,32-k)}{C(11,32)} = \frac{C(k,21)}{C(k,32)}$ a $P_3(k) = 1 - \frac{C(11,32-k)}{C(11,32)}$.

12. Pro $k > 25$ je $P_1(k) = P_2(k) = 0$ a $P_3(k) = 1$. Pro $k = 1, \dots, 25$ je $P_1(k) = 8 \cdot \frac{24!}{(25-k)!} \cdot \frac{(32-k)!}{32!}$, $P_2(k) = \frac{C(8,32-k)}{C(8,32)} = \frac{C(k,24)}{C(k,32)}$ a $P_3(k) = 1 - \frac{C(8,32-k)}{C(8,32)}$.

13. Pro $k > 29$ je $P_1(k) = P_2(k) = 0$ a $P_3(k) = 1$. Pro $k = 1, \dots, 29$ je $P_1(k) = 4 \cdot \frac{28!}{(29-k)!} \cdot \frac{(32-k)!}{32!}$, $P_2(k) = \frac{C(4,32-k)}{C(4,32)} = \frac{C(k,28)}{C(k,32)}$ a $P_3(k) = 1 - \frac{C(4,32-k)}{C(4,32)}$.

14. <u>Vhled:</u> úlohy 11, a 14 ze strany 63 jsou „stejné“. Přesněji isomorfní. Asi tak jako úlohy „Kolik je 5 korun a 7 korun?“ a „Kolik je 5 jablek a 7 jablek?“. Stačí zaměnit „korunu“ za „jablko“ a úlohy se vymění. Podobně jestliže v úloze 14 vyměníme „balíček karet“ za „osudí kuliček“, „srdce nebo eso“ za „modrá“ a „karta, která není ani srdce ani eso“ za „bílá“, dostaneme úlohu 11.

<u>Výsledky:</u> Identické s výsledky úlohy 11.

3.6 Různé úlohy

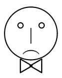
Příklad 7

Hodíme mincí. Padne-li R, vložíme do prázdného kelímku jednu kostku, padne-li L, vložíme do něj dvě kostky. Pak obsah kelímku vysypeme. Zjistěte $P(5)$, tj. pravděpodobnost jevu „padne 5 ok“, resp. „padne součet 5 ok“.

Řešení

Vhled: Každý případ se skládá ze dvou kroků:
1. hodíme mincí a vložíme do kelímku patřičný počet kostek,
2. vysypeme obsah kelímku a zjistíme, kolik ok padlo.

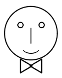
Označení: Znakem $R2$ označíme jev „při hodu mince padl R a při hodu kostky padla 2 oka“. Znakem $L7$ označíme jev „při hodu mince padl L a při hodu dvou kostek padlo 7 ok“ apod.



Všech případů je sedmnáct:

$$R1,\ R2,\ R3,\ R4,\ R5,\ R6,\ L2,\ L3,\ \ldots,\ L11,\ L12. \qquad (3.3)$$

Z nich příznivé jsou dva: $R5$ a $L5$. Tedy $P = \frac{2}{17}$.



Úvaha je chybná, protože případy (3.3) mají různou pravděpodobnost. Musíme začít znova.

Vhled: Situaci znázorníme graficky. Obdélník na obrázku 3.2a zobrazuje množinu všech možných případů. Obdélník rozdělíme na sedmnáct obdélníků tak, aby každému jevu odpovídal obdélníček a aby jeho obsah odpovídal pravděpodobnosti daného jevu.
Nejdříve hodíme mincí. Nastane jeden ze dvou stejně pravděpodobných jevů – R, nebo L. Proto obdélník rozdělíme na poloviny. Horní zobrazí případ R, dolní případ L. Viz obrázek 3.2b. Oba případy uvážíme odděleně.

Případ R: Házíme jednou kostkou. Máme šest stejně pravděpodobných jevů: $R1, \ldots, R6$. Každému jevu tedy bude odpovídá šestina horní poloviny, tedy jedna dvanáctina celého obdélníka: $P(R1) = \cdots = P(R6) = \frac{1}{12}$ – viz obrázek 3.3.

Případ L: Házíme dvěma kostkami. Máme jedenáct nestejně pravděpodobných případů: $L2, \ldots, L12$. Pravděpodobnosti těchto jevů byly nalezeny v řešení úlohy 2, strana 54: $P(2) = P(12) = \frac{1}{36}$, $P(3) = P(11) = \frac{1}{18}$, $P(4) = P(10) = \frac{1}{12}$, $P(5) = P(9) = \frac{1}{9}$, $P(6) = P(8) = \frac{5}{36}$, $P(7) = \frac{1}{6}$. Dále $P(13) = P(14) = \cdots = 0$.
V těchto poměrech pak rozdělíme dolní polovinu obdélníka – viz obrázek 3.3. Tedy $P(L2) = P(L12) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{72}$, $P(L7) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ atd.

Obrázek 3.2:

Obrázek 3.3:

Realizace: Z řešení úlohy 2, strana 54 víme, že při hodu dvěma kostkami je $P(\text{součet } 5) = \frac{1}{9}$. Tedy $P(\text{padne celkem 5 ok}) = P(R) \cdot P(\text{padne } 5) + P(L) \cdot P(\text{padne součet } 5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$.

Výsledek: $P(\text{padne celkem 5 ok}) = \frac{5}{36} = 0{,}13\overline{8}$

Příklad 8

Na obrázku 3.4 je graf s patnácti vrcholy. Po grafu se pohybuje figurka. Její výchozí stanoviště je ve vrcholu a_0. Pohybuje se náhodně podle toho, co padne při hodu mince. Tedy padne-li v prvním kroku líc, posune se do vrcholu b_1. Padne-li líc opět, posune se do vrcholu d_2 a zde končí. Padne-li v prvním kroku rub, figurka se posune do c_1 atd. Vrcholy označené písmeny a, b jsou „průchozí“ (kromě b_7). Vrcholy označené c, d a vrchol b_7 jsou koncové.
(a) Zjistěte, s jakou pravděpodobností figurka skončí ve vrcholu c_1, d_2, c_3,…, b_7, c_7.
(b) Stejnou úlohu řešte pro případ, kdy graf pokračuje uvedeným způsobem dále až do úrovně 99.
(c) Zjistěte, s jakou pravděpodobností skončí figurka v některém vrcholu c, jestliže bude graf nekonečně dlouhý.

Obrázek 3.4:

Řešení

(a) Vezměme ilustraci. Hledejme $P(d_4)$, tj. pravděpodobnost, že figurka skončí ve vrcholu d_4. Sem se může dostat pouze po čtyřech krocích tak, že v nich postupně padne L, R, L, L. Sledujme tuto cestu: $P(b_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = P(b_1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $P(b_3) = P(a_2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, $P(a_4) = $
$= P(b_3) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.
Z ilustrace je zřejmé, že končí-li procházka po k krocích, je pravděpodobnost tohoto konce $(\frac{1}{2})^k$. Odtud $P(c_1) = \frac{1}{2}$, $P(d_2) = \frac{1}{4}$, $P(c_3) = \frac{1}{8}$, $P(d_4) = \frac{1}{16}$, $P(c_5) = \frac{1}{32}$, $P(d_6) = \frac{1}{64}$, $P(c_7) = P(b_7) = \frac{1}{128}$.
(b) Dále $P(c_i) = (\frac{1}{2})^i$, $P(d_j) = (\frac{1}{2})^j$, $P(b_{99}) = P(c_{99}) = (\frac{1}{2})^{99}$, $i = 1, 3, 5, \dots, 99$,
$j = 2, 4, 6, \dots, 98$.

(c) Hledanou pravděpodobnost získáme jako součet nekonečné řady
$P(c_1) + P(c_3) + P(c_5) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$.

Příklad 9

Hráči A a B hrají následující hazardní hru. Každý položí na stůl 1 Kč. Pak jeden hodí mincí. Padne-li R, bere obě koruny hráč A, padne-li L, bere je hráč B. Na začátku hry má hráč A dvě a hráč B jednu korunu. Pro všechna přirozená k najděte pravděpodobnosti $P_1(k)$ a $P_2(k)$ definované v příkladu 6 a dále pravděpodobnosti:
$P_A(k)$, tj. pravděpodobnost, že hráč A zvítězil (tedy získal tři koruny) nejpozději v k-tém kroku, $P_B(k)$, tj. pravděpodobnost, že hráč B zvítězil nejpozději v k-tém kroku.

Řešení

Ve hře mohou nastat čtyři různé stavy:
- Hráč A má 3 Kč, hráč B má 0 Kč; stav značíme $(3, 0)$.
- Hráč A má 2 Kč, hráč B má 1 Kč; stav značíme $(2, 1)$.
- Hráč A má 1 Kč, hráč B má 2 Kč; stav značíme $(1, 2)$.
- Hráč A má 0 Kč, hráč B má 3 Kč; stav značíme $(0, 3)$.

Nastane-li stav $(3, 0)$, nebo $(0, 3)$, hra končí. V případě stavu $(2, 1)$ hra s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ pokračuje do stavu $(1, 2)$ a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ do stavu $(3, 0)$. Podobně pro stav $(1, 2)$. Když možné průběhy hry vhodně naznačíme pomocí grafu, převedeme tuto úlohu na příklad 8. Tento graf je na obrázku 3.5.

Obrázek 3.5:

Vidíme, že situace je shodná s grafem u příkladu 8. To umožňuje dát okamžitě odpovědi na některé z otázek: $P_1(k) = (\frac{1}{2})^k$, $P_2(k) = (\frac{1}{2})^k$.
Dále $P_A(1) = P_A(2) = \frac{1}{2}$,
$P_A(3) = P_A(4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$,
$P_A(5) = P_A(6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$,
...
$P_A(2l-1) = P_A(2l) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \cdots + (\frac{1}{2})^{2l-1} = \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{4})^{2l-1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}[1-(\frac{1}{4})^{2l-1}]$.
Analogicky $P_B(1) = 0$,
$P_B(2) = P_B(3) = \frac{1}{4}$,
$P_B(4) = P_B(5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$,
...
$P_B(2l) = P_B(2l+1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + (\frac{1}{2})^{2l} = \frac{1}{4}\frac{1-(\frac{1}{4})^{2l}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}[1-(\frac{1}{4})^{2l}]$.

Výsledek: $P_1(k) = (\frac{1}{2})^k$, $P_2(k) = (\frac{1}{2})^k$, $P_A(2l-1) = P_A(2l) = \frac{2}{3}[1-(\frac{1}{4})^{2l-1}]$,
$P_B(2l) = P_A(2l+1) = \frac{1}{3}[1-(\frac{1}{4})^{2l}]$, kde $l \in \mathbf{N}$.

Úlohy

1. Hodíme mincí. Padne-li R, vložíme do kelímku tři kostky, padne-li L, vložíme do kelímku dvě kostky. Pak kostky z kelímku vysypeme. Najděte $P(5)$, tj. pravděpodobnost jevu „součet ok na všech hozených kostkách je 5“.
2. Házíme mincí tak dlouho, dokud nepadne RLR, nebo LRL. Pro $k = 1, 2, 3, \ldots, 10$ určete pravděpodobnosti $P_1(k)$, $P_2(k)$, $P_3(k)$, definované v příkladu 6.
3. Hráči A a B hrají hazardní hru popsanou v příkladu 9. Na začátku mají oba hráči po 2 Kč. Označme $P(k)$ pravděpodobnost jevu „hra v k-tém kroku skončila“. Určete (a) $P(2)$, (b) $P(3)$, (c) $P(4)$, (d) $P(8)$, (e) $P(31)$, (f) $P(32)$.
4. Hráči A a B hrají hru. Hází mincí a zaznamenávají, co padlo. Jakmile padne dvakrát po sobě R, vítězí hráč A. Jakmile padne RLR, nebo LRL vítězí hráč B. Zjistěte, jakou pravděpodobnost má hráč A, že během prvních pěti her (a) zvítězí, (b) prohraje, (c) nezvítězí, ale ani neprohraje.
5. Žák píše test, ve kterém na každou ze tří otázek odpoví zakroužkováním jedné ze dvou nabízených odpovědí. Za každou správnou odpověď získává jeden bod. Jaká je pravděpodobnost, že žák odpovídající zcela náhodně získá (a) dva, (b) tři body?
6. Žák píše test, ve kterém na každou z pěti otázek odpoví zakroužkováním jedné ze čtyř nabízených odpovědí. Za každou správnou odpověď získává jeden bod. Jaká je pravděpodobnost, že žák odpovídající zcela náhodně získá (a) jeden, (b) dva, (c) tři body?
7. Jak se změní výsledky předchozí úlohy, jestliže žák u každé z odpovědí správně vyloučí jednu chybnou odpověď a hádá pouze ze zbylých tří?

Výsledky

1. Z řešení úlohy 2, strana 54 víme, že při hodu dvěma kostkami je $P(5) = \frac{1}{9}$. Když házíme třemi kostkami je všech možností $6^3 = 216$. Číslo 5 může padnout některým z těchto šesti způsobů:

   $(1 + 1 + 3)$, $(1 + 3 + 1)$, $(3 + 1 + 1)$, $(1 + 2 + 2)$, $(2 + 1 + 2)$, $(2 + 2 + 1)$. V tomto případě je tedy $P(5) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

   Tedy jev „na minci padne R a na třech kostkách pak bude součet 5 ok“ má pravděpodobnost $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{72}$ a jev „na minci padne L a na dvou kostkách pak bude součet 5 ok“ má pravděpodobnost

   $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$. Hledaná pravděpodobnost je součtem obou těchto pravděpodobností, tedy $P(\text{součet } 5) = \frac{1}{72} + \frac{1}{18} = \frac{5}{72} = 0{,}069\overline{4}$.

2. Vhled: Nejprve najdeme hodnoty funkce P_1. Po prvním ani druhém kroku hra končit nemůže, proto je $P_1(1) = P_1(2) = 0$. Po třetím kroku nastává jedna z osmi stejně pravděpodobných možností. Ty rozdělíme do tří skupin takto: 1. RLR, LRL – nazveme *příznivé*, 2. RRL, LLR – nazveme *nadějné*, 3. RRR, RLL, LRR, LLL – nazveme *pokračující*.

   Příznivé případy jsou dva, tedy $P_1(3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Nastane-li některý z příznivých případů, hra končí. Zbylých šest případů je nepříznivých. Rozdělili jsme je do dvou skupin podle toho, zda je, nebo není naděje, že hra v příštím kroku skončí. Pro čtyři případy skupiny 3 hra v příštím kroku končit nemůže. Proto jsme je nazvali *pokračující*. Naproti tomu pro oba případy skupiny 2 hra v příštím kroku skončit může. Proto jsme je nazvali *nadějné*.

   Když v případě RRL padne R, nebo v případě LLR padne L, změní se *nadějný* případ na *příznivý* a hra končí. Padne-li po RRL líc, nebo po LLR rub, hra nekončí. Navíc z případu *nadějného* se stane případ *pokračující*.

   Tedy každý *pokračující* případ se s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ stává *nadějným* (například když po LRR padne L) a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ zůstává *pokračující* (například když po LRR padne R).

   Každý *nadějný* případ se s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ stává *příznivým* (například když po LLR padne L) a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ *pokračujícím* (například když po LLR padne R). Přehledně lze změnu, ke které dochází v jednom kroku zapsat tabulkou 3.4.

Případ	**se stává**	**s pravděpodobností**
nadějný	příznivým	$\frac{1}{2}$
nadějný	pokračujícím	$\frac{1}{2}$
pokračující	nadějným	$\frac{1}{2}$
pokračující	pokračujícím	$\frac{1}{2}$
příznivý	příznivým	1

Tabulka 3.4:

Označení: Pravděpodobnost jevu „po k-tém kroku je daný případ *pokračující*“ označme $P_p(k)$, „po k-tém kroku je daný případ *nadějný*“ označme $P_n(k)$.

Realizace: Z tabulky 3.4 okamžitě plyne:

$$P_3(k+1) = \frac{1}{2} \cdot P_n(k) + P_3(k) \tag{3.4}$$

$$P_n(k+1) = \frac{1}{2} \cdot P_p(k) \tag{3.5}$$

$$P_p(k+1) = \frac{1}{2} \cdot [P_n(k) + P_p(k)] \tag{3.6}$$

$$P_1(k+1) = P_3(k+1) - P_3(k)$$

$$P_1(k+1) = \frac{1}{2} \cdot P_n(k)$$

Z čísel $P_3(3) = \frac{1}{4}$, $P_n(3) = \frac{1}{4}$, $P_p(3) = \frac{1}{2}$ pak postupně najdeme $P_3(4) = \frac{1}{2} \cdot P_n(3) + P_3(3) = = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ (podle (3.4)), $P_n(4) = \frac{1}{2} \cdot P_p(3) = \frac{1}{4}$ (podle (3.5)), $P_p(4) = \frac{1}{2} \cdot [P_n(3) + P_p(3)] = \frac{3}{8}$ (podle (3.6)), dále $P_3(5) = \frac{1}{2} \cdot P_n(4) + P_3(4) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ (podle (3.4)), $P_n(5) = \frac{1}{2} \cdot P_p(4) = \frac{3}{16}$ (podle (3.5)), $P_p(5) = \frac{1}{2} \cdot [P_n(4) + P_p(4)] = \frac{5}{16}$ (podle (3.6)) atd. Viz tabulka 3.5.

k	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_p(k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{13}{64}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{34}{256}$	$\frac{55}{512}$
$P_n(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{13}{128}$	$\frac{21}{256}$	$\frac{17}{256}$
$P_3(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{43}{64}$	$\frac{47}{64}$	$\frac{201}{256}$	$\frac{423}{512}$
$P_1(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{256}$	$\frac{21}{512}$

Tabulka 3.5:

Pro pravděpodobnost $P_2(k)$ platí, že $P_2(k) = 1 - P_3(k)$.

3. (a) Padne-li v prvních dvou krocích RR, nebo LL, hra končí ve druhém kroku. Padne-li RL, nebo LR, situace bude stejná jako na začátku. Tedy (a) $P(2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ve třetím kroku hra končit nemůže, a proto (b) $P(3) = 0$. (c) S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ tedy hra po dvou krocích skončila ve výchozí pozici. Můžeme zopakovat to, co již víme. Pravděpodobnost, že hra končí ve čtvrtém kroku, je polovina z poloviny, tedy čtvrtina. Pravděpodobnost, že pokračuje, je též čtvrtina. Proto $P(4) = \frac{1}{4}$. Stejnou úvahou získáme (d) $P(8) = \frac{1}{16}$, (e) $P(31) = 0$, (f) $P(32) = \frac{1}{2^{16}}$.

   Zobecnění: $P(2k-1) = 0$, $P(2k) = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbf{N}$.

4. Označíme $P(A)$ pravděpodobnost toho, že vyhraje hráč A, $P(B)$ pravděpodobnost toho, že vyhraje hráč B, a $P(H_i)$ pravděpodobnost toho, že hra pokračuje do $(i+1)$-ého kola. Postupně si zapíšeme situaci v jednotlivých krocích.

   <u>1. krok:</u> $P(A) = 0$, $P(B) = 0$, $P(H_1) = 1$.

   <u>2. krok:</u> V jednom případě A vyhraje (padne-li RR), tedy $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. B nemůže vyhrát, tedy $P(B) = 0$. V ostatních případech hra pokračuje (RL, LR, LL), tedy $P(H_2) = \frac{3}{4}$.

   <u>3. krok:</u> V jednom případě ze šesti možných vyhraje A (LRR), tedy $P(A) = P(H_2) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$. Ve dvou případech vyhraje B (RLR, LRL), tedy $P(B) = P(H_2) \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{4}$. Ve zbylých třech případech nevyhraje ani jeden a hra pokračuje, tedy $P(H_3) = P(H_2) \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{8}$.

   <u>4. krok:</u> Analogicky zjistíme $P(A) = P(H_3) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{16}$, $P(B) = P(H_3) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{16}$, $P(H_4) = = P(H_3) \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{4}$.

<u>5. krok:</u> $P(A) = P(H_4) \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{16}$, $P(B) = P(H_4) \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{16}$, $P(H_5) = P(H_4) \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{8}$.

Nyní už dokážeme odpovědět na zadané otázky. Pravděpodobnost, že během prvních pěti her zvítězí A, je $P = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$. Pravděpodobnost, že během prvních pěti her A prohraje (tj. B zvítězí), je $P = 0 + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$. Pravděpodobnost, že ani nezvítězí, ani neprohraje, tj. hra pokračuje do šestého kola, je $P = P(H_5) = \frac{1}{8}$.

5. Po každé odpovědi se blížíme ke konečnému stavu. Jsou čtyři možnosti: tři špatné odpovědi, dvě špatné a jedna správná, jedna špatná a dvě správné, tři správné. Situaci znázorníme obrázkem 3.6.

Obrázek 3.6:

Pravděpodobnost, že při náhodném postupu od počátku P na linii „po třetí odpovědi“ skončíme v bodě a, nebo d, je $\frac{1}{8}$ (do a, resp. d se dostaneme jednou cestou). Pravděpodobnost, že skončíme v bodě b, nebo c, je $\frac{3}{8}$ (do b, resp. c se dostaneme třemi cestami). Tedy

(a) P(2 odpovědi správné)$= P(c) = \frac{3}{8}$, (b) P(3 odpovědi správné)$= P(d) = \frac{1}{8}$.

6. Při náhodné odpovědi na každou otázku testu je P(správná odpověď) $= 0{,}25$ a P(chybná odpověď) $= 0{,}75$. Tedy při hodnocení celého testu, tj. všech pěti otázek, je

(a) P(právě 1 správná odpověď) $= 5 \cdot (0{,}25)^1 \cdot (0{,}75)^4 \doteq 0{,}39551$,

(b) P(právě 2 správné odpovědi) $= 10 \cdot (0{,}25)^2 \cdot (0{,}75)^3 \doteq 0{,}26367$,

(c) P(právě 3 správné odpovědi) $= 10 \cdot (0{,}25)^3 \cdot (0{,}75)^2 \doteq 0{,}0\,8789$.

7. Místo 0,25 bude všude $\frac{1}{3}$, místo 0,75 bude všude $\frac{2}{3}$. Tedy

(a) P(právě 1 správná odpověď) $= 5 \cdot (\frac{1}{3})^1 \cdot (\frac{2}{3})^4 \doteq 0{,}32922$,

(b) P(právě 2 správné odpovědi) $= 10 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^3 \doteq 0{,}32922$,

(c) P(právě 3 správné odpovědi) $= 10 \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{2}{3})^2 \doteq 0,16461$.

Kapitola 4

Stereometrie

4.1 Krychlová tělesa

Úmluva: Krychlovým tělesem K nazveme těleso, které vznikne „pěkným“ slepením shodných krychlí K_1, K_2,..., K_n, tj. $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.
Slovo „pěkným“ upřesníme takto: Jsou-li K_i a K_j kterékoli dvě různé krychle z krychlí K_1, K_2,..., K_n, pak platí:

- Když zvolíme libovolnou hranu na K_i i libovolnou hranu na K_j, pak jsou tyto úsečky buď navzájem kolmé, nebo rovnoběžné.
- Průnik $K_i \cap K_j$ je

  – prázdná množina,

  – jeden bod, který je vrcholem krychle K_i i krychle K_j,

  – úsečka, která je hranou krychle K_i i krychle K_j,

  – čtverec, který je stěnou krychle K_i i krychle K_j.
- Středy krychlí K_i a K_j lze spojit lomenou čarou, která celá leží uvnitř tělesa K.

Dodejme, že i jedinou krychli budeme považovat za krychlové těleso.

Poznámka: Toto poměrně nepřehledné vymezení pojmu krychlové těleso lze nahradit sice méně přesným, ale názornějším návodem.

Návod na vytvoření krychlového tělesa z několika shodných krychlí

- Vezměte dvě krychle a slepte je podél stěn (stěna jednoho padne přesně na stěnu druhého). To, co vzniklo, je krychlové těleso, které nazveme dvoukrychle.
- K tomuto tělesu postupně nalepte další krychle tak, že při každém lepení se lepí přesně stěna, nebo stěny nové krychle na jednu, nebo některé ze stěn krychlí již vytvořeného tělesa.

Označení: Každé krychlové těleso lze přehledně zapsat způsobem, který vidíme na obrázku 4.1. Krychlové těleso z plánu A je tvořeno čtyřmi krychlemi, všechny leží v prvním podlaží a jsou slepeny do tvaru písmene L. Krychlové těleso z plánu B je tvořeno čtyřmi krychlemi;

tři tvoří „věž“ a čtvrtá je přilepena k prostřední krychli věže, tedy k té krychli, která leží ve druhém podlaží. Těleso z plánu C je tvořeno pěti krychlemi. Čtyři leží v prvním podlaží a tvoří hranol s rozměry $2 \times 2 \times 1$. Pátá leží ve druhém podlaží na jedné z krychlí prvního podlaží. Těleso z plánu D je shodné s tělesem z plánu A, pouze jeho poloha je jiná. Podobně těleso z plánu E je shodné s tělesem z plánu B.

Obrázek 4.1:

Úmluva: Místo dlouhého termínu „těleso z plánu A na obrázku 4.1“ budeme stručně říkat „těleso 4.1A“. Podobně další případy.

Příklad 1

Popište všechny vrcholy krychlového tělesa 4.1C. Vrcholy okótujte, tj. ke každému vrcholu připište číslo udávající podlaží, v němž se tento nachází. Konečně popište všechny jeho stěny i hrany a zjistěte jejich počet.

Řešení

Obrázek 4.2:

Plán krychlového tělesa C je překreslen na obrázku 4.2. Vrcholy tělesa jsou pojmenovány a okótovány. Kótou je dolní index u písmene.

Těleso má 14 vrcholů, 21 hran a 9 stěn.

Vrcholy: A_0, B_0, C_0, D_0, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1, J_1, K_2, L_2, M_2, N_2.

Hrany: A_0B_0, B_0C_0, C_0D_0, D_0A_0, E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1, H_1I_1, I_1J_1, J_1E_1, K_2L_2, L_2M_2, M_2N_2, N_2K_2, A_0E_1, B_0F_1, C_0G_1, H_1M_2, D_0N_2, J_1K_2, I_1L_2.

Stěny: čtverec $A_0B_0C_0D_0$ leží v nultém podlaží a je „spodní podstavou“ tělesa; šestiúhelník $E_1F_1G_1H_1I_1J_1$ leží v prvním podlaží; čtverec $K_2L_2M_2N_2$ je „horní podstavou“ tělesa; dále má těleso ještě dvě čtvercové stěny $I_1H_1M_2L_2$ a $J_1I_1L_2K_2$, dvě obdélníkové stěny $A_0B_0F_1E_1$ a $B_0C_0G_1F_1$ a dvě šestiúhelníkové stěny $A_0E_1J_1K_2N_2D_0$ a $C_0D_0N_2M_2H_1G_1$.

Poznámka: Dolní indexy (kóty) vrcholů budeme v budoucnu často vypouštět. Například při výčtu hran i stěn je nebylo nutné uvádět.

Úlohy

1. Určete počet vrcholů v, hran h a stěn s těles uvedených na obrázku 4.1, kromě tělesa 4.1C.
2. Kolik navzájem neshodných krychlových těles lze sestrojit ze (a) tří, (b) čtyř shodných krychlí? Nakreslete plány těchto těles.

   Poznámka: Za shodná považujeme taková dvě tělesa, z nichž jedno se dá přemístit do druhého. Tedy tělesa nepřímo shodná za shodná nepovažujeme.
3. Najděte všechna navzájem neshodná krychlová tělesa, která lze sestrojit slepením dvou dvoukrychlí.
4. Ze tří jednotkových krychlí vytvořme hranol s rozměry $1 \times 1 \times 3$. Vezměme dva takové hranoly a jejich slepením sestrojme další krychlová tělesa. Kolik takových navzájem neshodných těles lze sestrojit? Nakreslete plány všech těchto těles.
5. Máme k dispozici krychlová tělesa A, B, C z obrázku 4.3, každé ve dvou exemplářích. Dá se z této „stavebnice“ postavit některé z těles D, E, F, G z obrázku 4.3? Když ano, jak? Když ne, proč?

Obrázek 4.3:

6. Pro každé z pěti krychlových těles uvedených na obrázku 4.1 evidujte tabulkou těchto deset údajů: 1) počet krychlí, ze kterých je složeno, 2) počet vrcholů v úrovni 0, 3) počet vrcholů v úrovni 1, 4) počet vrcholů v úrovni 2, 5) počet vrcholů v úrovni 3, 6) počet v všech jeho vrcholů, 7) počet h všech jeho hran, 8) počet čtyřúhelníkových stěn, 9) počet šestiúhelníkových stěn, 10) počet s všech jeho stěn.
7. To, co je v příkladu 1 uděláno pro těleso 4.1C, udělejte pro tělesa 4.5C a 4.5D.
8. Vytvořte tabulku udávající počet vrcholů, hran i stěn každého z krychlových těles uvažovaných v úlohách 2, 3, 4.
9. Pro každé z těles předchozí úlohy platí jednoduchý vztah mezi čísly h, s, v. Najděte tento vztah.

Výsledky

1. Pro shodná tělesa A, D je $v = 12$, $h = 18$ a $s = 8$. Pro shodná tělesa B, E je $v = 16$, $h = 24$ a $s = 10$.
2. (a) Dvě. Jejich plány jsou na obrázku 4.4. (b) Osm. Jejich plány jsou na obrázcích 4.1A, 4.1B a obrázku 4.5.

Obrázek 4.4:

Obrázek 4.5:

Obrázek 4.6:

3. Je to šest těles uvedených na obrázcích 4.1A, 4.5A, 4.5B, 4.5D, 4.5E a 4.5F.

4. Je to deset těles uvedených na obrázku 4.6.

5. Tělesa E a F postavit lze. Konstrukce tělesa E je na plánech 4.7H a 4.7I. Nejprve se položí vedle sebe dvě tělesa 4.3B (plán 4.7H), na ně pak těleso 4.3C (plán 4.7I) a nakonec těleso 4.3A (plán 4.3E). Konstrukce tělesa 4.3F je na plánech 4.7J a 4.7K. Vezme se těleso 4.3C (plán 4.7J), k němu se přilepí obě tělesa 4.3B (plán 4.7K) a nakonec druhé těleso 4.3C (plán 4.3F). Tělesa 4.3D a 4.3G se postavit nedají. To zdůvodníme.

   Důvod pro těleso D: Těleso D je složeno ze čtyř krychlí a je různé od tělesa C. Jediná možnost, jak by se dalo slepit, je ze dvou exemplářů B. Lehce nahlédneme, že je to nemožné.

   Důvod pro těleso G: těleso G je složeno ze sedmnácti krychlí. V naši stavebnici máme šest těles složených celkem z osmnácti krychlí, z nich však nelze vybrat podskupinu, která by měla právě sedmnáct krychlí.

Obrázek 4.7:

6. Výsledky jsou uspořádány v tabulce 4.1.

Krychlové těleso z obr. 4.1	A	B	C	D	E	
1. je složeno z	4	4	5	4	4	krychlí,
2. na úrovni 0 má	6	4	4	4	4	vrcholů,
3. na úrovni 1 má	6	4	6	4	8	vrcholů,
4. na úrovni 2 má	0	4	4	0	4	vrcholů,
5. na úrovni 3 má	0	4	0	4	0	vrcholů,
6. celkem má	12	16	14	12	16	vrcholů,
7. celkem má	18	24	21	18	24	hran,
8. celkem má	6	8	6	6	8	čtyřúhelníkových stěn,
9. celkem má	2	0	3	2	0	šestiúhelníkových stěn,
10. celkem má	8	10	9	8	10	stěn.

Tabulka 4.1:

7. Těleso 4.5C – viz obrázek 4.8a. Vrcholů je 17: A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0, G_1, H_1, I_1, J_1, K_1, L_1, M_1, N_2, P_2, Q_2, R_2. Hran je 27: AB, BC, CD, DE, EF, FA, GH, HI, IM, MG, IJ, JK, KL, LI, NP, PQ, QR, RN, AG, BH, CI, DJ, EK, FR, MN, IP, LQ (kóty již neuvádíme). Stěn je 12: $ABCDEF$, $GHIM$, $IJKL$, $NPQR$, $ABHG$, $MIPN$, $CDJI$, $FEKLQR$, $DEKJ$, $ILQP$, $BCIH$, $AFRNMG$.

   Těleso 4.5D – viz obrázek 4.8b. Vrcholů je 15: A_0, B_0, C_0, D_0, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1, J_1, K_1, L_2, M_2, N_2, P_2. Hran je 23: AB, BC, CD, DA, EF, FG, GK, KE, GH, HI, IJ, JG, LM, MN, NP, PL, AE, BF, CJ, DP, KL, HM, IN (kóty již neuvádíme). Stěn je 10: $ABCD$, $EFGK$, $GHIJ$, $LMNP$, $ABFE$, $KHML$, $PNIJCD$, $HINM$, $BCJF$, $ADPLKE$.

8. Výsledky jsou v tabulce 4.2.

Obrázek 4.8:

	4.1A	4.1B	4.4A	4.4B	4.5A	4.5B	4.5C	4.5D	4.5E	4.5F	4.6A
v	12	16	12	8	8	16	17	15	8	15	8
h	18	24	18	12	12	24	27	23	12	23	12
s	8	10	8	6	6	10	12	10	6	10	6

	4.6B	4.6C	4.6D	4.6E	4.6F	4.6G	4.6H	4.6I	4.6J
v	8	16	16	12	16	15	18	20	15
h	12	24	24	18	24	23	28	32	23
s	6	10	10	8	10	10	12	14	10

Tabulka 4.2:

9. Hledaný vztah je Eulerova formule: $s + v = h + 2$.

Výzva 1

Prověřte, zda Eulerova formule (viz řešení úlohy 9) platí i pro čtyři krychlová tělesa z obrázku 4.9. Vyjasněte pojmy vrchol, hrana, stěna krychlového tělesa.

Obrázek 4.9:

4.2 Sítě těles

Úmluva: Na obrázku 4.10 vidíme šest kandidátů na titul „síť krychle“.

Obrázek 4.10:

Tento titul však přiznáme pouze útvaru A. Ostatním útvarům tento titul nepřináleží, neboť útvar B pokryje pouze pět stěn krychle, útvar C pokryje všechny stěny krychle, ale jednu dvojnásobně, útvar D jednu stěnu nepokryje a jednu pokryje dvojnásobně. Útvar E je sice přesný „střih na oděv pro krychli“, ale jedna stěna krychle bude pokryta dvěma trojúhelníky. Konečně útvar F je vlastně ze dvou kusů, protože jedna stěna je k „tělu sítě“ přilepena pouze vrcholem.

Příklad 2

Sestrojte alespoň jednu síť krychlového tělesa, jehož plán je na obrázku 4.2.

Řešení

Běžný postup konstrukce sítě tělesa je následující. Představíme si, že je těleso již „oděno“ a postupně je, stěnu po stěně, rozbalujeme do roviny. Při složitějších tělesech však uvedený postup může být příliš náročný. Proto ukážeme jiný, algoritmičtější postup. Nejprve narýsujeme všechny stěny – jednotlivé díly budoucího „šatu“ tělesa. V našem případě to bude devět stěn, jak bylo zjištěno v příkladu 1. Jsou zobrazeny na obrázku 4.11.

Teď postupně „sešijeme“ všech devět stěn do jediného kusu – hledané sítě. Nejprve ke čtverci a „přišijeme“ šestiúhelník c podél společné strany AD. K tomu útvaru „přišijeme“ podél strany DC šestiúhelník d, dále podél strany AB obdélník e a podél strany BC obdélník f. Útvar, který jsme zatím získali, má obsah čtrnáct jednotkových čtverečků a je to 16-úhelník

Obrázek 4.11:

zobrazený na obrázku 4.12a. Postupné „přišívání“ můžeme stručně zapsat: a, AD, c, DC, d, AB, e, BC, f.

Pokračujeme v „přišívání“ dalších stěn: podél FG „přišijeme“ b, podél KN pak i, dále podél KL g a konečně podél LI stěnu h. Celý proces zapíšeme stručně takto: a, AD, c, DC, d, AB, e, BC, f, FG, b, KN, i, KL, g, LI, h.

Výsledná síť daného tělesa je na obrázku 4.12b.

Obrázek 4.12:

Terminologie: **Pravidelným**, neboli **platónským tělesem** nazýváme mnohostěn, který má tyto dvě vlastnosti:
1. všechny jeho vrcholy leží na jediné ploše kulové (je to plocha opsaná mnohostěnu);
2. všechny jeho stěny jsou navzájem shodné pravidelné n-úhelníky.

Existuje pět platónských těles (viz obrázek 4.13): (1) tetraedr (pravidelný čtyřstěn), kde $v = 4$, $h = 6$, $s = 4$, (2) hexaedr (pravidelný šestistěn, tj. krychle), kde $v = 8$, $h = 12$, $s = 6$, (3) oktaedr (pravidelný osmistěn), kde $v = 6$, $h = 12$, $s = 8$, (4) dodekaedr (pravidelný dvanáctistěn), kde $v = 20$, $h = 30$, $s = 12$, (5) ikosaedr (pravidelný dvacetistěn), kde $v = 12$, $h = 30$, $s = 20$.

Obrázek 4.13:

Úlohy

1. Kolik různých (tj. vzájemně neshodných) sítí má krychle? Všechny je nakreslete a na každé síti označte každou stěnu některým z písmen x, y, z tak, aby navzájem kolmé stěny byly označeny různými písmeny.

2. Na obrázku 4.14a je síť standardně popsané krychle $ABCDEFGH$ (tedy $ABCD$ a $EFGH$ jsou rovnoběžné stěny a AE, BF, CG a DH rovnoběžné hrany). Ze čtrnácti vrcholů sítě pouze tři jsou popsány. Popište ostatní. Stejnou úlohu řešte pro sítě z obrázků 4.14b až 4.14g. Najděte vždy všechna řešení.

Obrázek 4.14:

3. Nakreslete a popište alespoň jednu síť krychlového tělesa, jehož plán je na obrázku (a) 4.1A, (b) 4.1B.
4. Na obrázku 4.15 je nakreslená a popsaná síť krychlového tělesa. Na obrázku jsou chyby – opravte je. Těleso popište plánem.

Obrázek 4.15:

5. Kolik různých sítí má tetraedr? Nakreslete je a popište.
6. Všech $2n$ hran n-bokého jehlanu má stejnou délku d. Jakých hodnot může nabývat číslo n? Nakreslete alespoň jednu síť každého z těchto jehlanů. Síť popište.
7. Krychli $ABCDEFGH$ protneme rovinou BGE. Vzniknou dvě tělesa: čtyřstěn $EBGF$ a sedmistěn $ABCDEGH$. Nakreslete alespoň jednu síť těchto těles a sestrojte jejich papírové modely.
8. Krychli lze složit ze tří shodných jehlanů. Zjistěte jak a udělejte model této skládačky.
9. Když vhodným způsobem „osekáme“ všech osm vrcholů krychle, dostaneme mnohostěn, který má čtrnáct stěn, z nichž osm je rovnostranných trojúhelníků a šest (a) čtverců, (b) pravidelných osmiúhelníků. Nakreslete alespoň jednu síť těchto těles a udělejte jejich modely.
10. Sestrojte alespoň jednu síť oktaedru, dodekaedru a ikosaedru a jejich modely.
11. Kolik různých sítí má oktaedr?

Výsledky

1. Jedenáct. Jsou na obrázku 4.16.

Obrázek 4.16:

2. Řešení je na obrázku 4.17 a 4.18. (a) Síť a, (b) sítě b_1 a b_2, (c) síť c, (d) sítě d_1 a d_2, (e) síť e, (f) síť f, (g) síť g.

Obrázek 4.17:

Obrázek 4.18:

3. (a) Jedno řešení je na obrázku 4.19a. Obě úsečky GH jsou silně vyznačeny. Značí to, že zde je síť nastřižena – podél úseček GH díly sítě nejsou sešity. (b) Jedno řešení je na obrázku 4.19b. Nastřihnout nutno úsečky IL a GH (každá má na obrázku dva výskyty – tedy celkem čtyři nastříhnutí).

Obrázek 4.19:

4. Na síti jsou dvě chyby: nahoře místo písmene B má být písmeno Q a schází čtvercová stěna $BHIC$. Lze ji „přišít“ k straně CI. Plán tělesa je na obrázku 4.5C.
5. Dvě. Jsou na obrázku 4.22a.
6. Nastávají tři možnosti: $n = 3, 4, 5$. Je-li $n = 3$, pak jehlan je tetraedr a jeho sítě jsou na obrázku 4.22a. Pro $n = 4$ a $n = 5$ jsou po jedné síti jehlanů na obrázcích 4.20a a 4.20b.

Obrázek 4.20:

7. Jedna síť každého z těles je na obrázcích 4.21a a b.
8. Zvolíme jeden vrchol krychle jako hlavní vrchol pro všechny tři jehlany. Tři protější stěny krychle budou pak podstavy jednotlivých jehlanů. Například A je hlavní vrchol a podstavy jsou: $BCGF$, $DCGH$ a $EFGH$. Jedna síť prvního je na obrázku 4.22b.

Obrázek 4.21:

Obrázek 4.22:

9. (a) Těleso je na obrázku 4.23*a*, jedna jeho síť na obrázku 4.23*b*. (b) Těleso je na obrázku 4.23*c*, jedna jeho síť na obrázku 4.23*d*.

Obrázky 4.23*c*, *d* nejsou správně nakresleny. Stěny „osekané krychle“ jsou rovnostranné trojúhelníky a osmiúhelníky – ty ale nejsou pravidelné. Nutno useknout z „rohů krychle“ více. Jestliže je délka hrany krychle a, pak hrana „osekané krychle“ je $a(\sqrt{2}-1)$. Budete-li konstruovat síť, pak osmiúhelníkovou stěnu sestrojíte snadno pomocí kružnice vepsané do čtvercové stěny krychle.

Obrázek 4.23:

10. Jedna síť oktaedru je na obrázku 4.24*a*, jedna síť dodekaedru na obrázku 4.24*b* a jedna síť ikosaedru na obrázku 4.25.

Obrázek 4.24:

Obrázek 4.25:

11. Jedenáct.

4.3 Řezy

Terminologie: V rovině α je dán n-úhelník $M_n = A_1A_2 \ldots A_n$ a mimo ni bod V. Dále je dáno posunutí p, které převádí rovinu α do roviny $p(\alpha) = \alpha'$ různé od α. Označme $p(M_n) = M'_n = A'_1A'_2 \ldots A'_n$. Část prostoru, která je ohraničena rovinami α a α' a rovnoběžníky $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2, \ldots, A_nA_1A'_1A'_n$ nazýváme n-bokým hranolem $H_n = A_1A_2 \ldots A_nA'_1A'_2 \ldots A'_n$.

Mnohoúhelníky M_n a M'_n nazýváme podstavami nebo základnami hranolu, hrany $A_1A'_1, \ldots, A_nA'_n$ jsou boční hrany hranolu, uvedené rovnoběžníky jsou boční stěny hranolu, vzdálenost rovin α, α' nazýváme výškou hranolu.

Hranol nazýváme pravidelným, právě když podstava M_n (a tedy též podstava M'_n) je pravidelný mnohoúhelník a navíc všechny boční stěny jsou pravoúhelníky. Každou úsečku $A_iA'_j$, která prochází vnitřkem hranolu, nazýváme tělesovou úhlopříčkou hranolu. Objem hranolu značíme $V(H_n)$, povrch hranolu značíme $S(H_n)$, plášť hranolu (tj. obsah všech bočních stěn) značíme $Q(H_n)$.

Část prostoru, která je ohraničena mnohoúhelníkem M_n a trojúhelníky A_1A_2V, $A_2A_3V, \ldots,$ A_nA_1V, nazýváme n-bokým jehlanem $J_n = A_1A_2 \ldots A_nV$.
Mnohoúhelník M_n je jeho podstava nebo základna, hrany $A_1V, \ldots, A_nV$ jsou boční hrany jehlanu, uvedené trojúhelníky jsou boční stěny jehlanu. Vrchol V nazýváme hlavním vrcholem jehlanu a jeho vzdálenost od roviny α nazýváme výškou jehlanu.
Jehlan nazýváme pravidelným, právě když je podstava M_n pravidelný mnohoúhelník a všechny boční stěny jsou navzájem shodné. Objem jehlanu značíme $V(J_n)$, povrch jehlanu značíme $S(J_n)$, plášť jehlanu (tj. obsah všech bočních stěn) značíme $Q(J_n)$.
Dolní index n v symbolech M_n, M'_n, H_n, J_n někdy vypouštíme.

Příklad 3

Na síti krychle jsou vyznačeny body K, L, M (obrázek 4.26a). Bod K je vrchol a body M, L jsou středy hran krychle. Řez krychle rovinou KLM vyznačte na síti. Pojmenujte útvar, který je řezem.

Řešení

Obrázek 4.26:

Strategie: Zvolíme označení vrcholů sítě a vyznačíme body K, L a M. Bod K je vrchol G, bod M je střed hrany AE, bod L je střed hrany BC (obrázek 4.26b). Pak krychli vymodelujeme nebo nakreslíme a sestrojíme řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM (obrázek 4.27). Posléze řez přeneseme na síť (obrázek 4.28).

Obrázek 4.27:

Sestrojení řezu: (Obrázek 4.27) Body K a L leží ve stěně $BCGF$, tedy jejich spojnice, úsečka $KL = GL$ je částí řezu.
Stěny $BCGF$ a $ADHE$ jsou rovnoběžné, proto je rovina KLM protíná v rovnoběžných úsečkách. Vedeme tedy bodem M přímku rovnoběžně s KL a její průsečík s hranou EH označíme N. Úsečka MN je další část hledaného řezu.
Body K a N leží ve stěně $EFGH$, proto i úsečka KN je částí řezu.

Stěny $EFGH$ a $ABCD$ jsou rovnoběžné, proto je řez stěny $ABCD$ rovinou KLM rovnoběžný s úsečkou KN. Sestrojme tuto rovnoběžku a její průsečík s hranou AB označme P. Úsečky PL a PM jsou též dvě části hledaného řezu.
Vidíme, že řezem je pětiúhelník $KLPMN$.

<u>Přenos řezu na síť:</u> (Obrázek 4.28) Řez nelze sestrojit pomocí rovnoběžnosti použité na obrázku 4.27, protože rovnoběžnost se po rozbalení pláště krychle naruší. Proto řez přeneseme tak, že najdeme polohu bodů N a P na hranách.

Obrázek 4.28:

Nejprve bod N: Trojúhelníky GLC a MNE jsou podobné. Proto z poměru $|GC| : |CL| = 2 : 1$ plyne $|ME| : |EN| = 2 : 1$. Víme, že ME je polovina hrany AE, tedy EN je čtvrtina hrany EH.
Teď bod P: Trojúhelníky GNH a PLB jsou podobné. Proto z poměru $|GH| : |HN| = 4 : 3$ plyne
$|PB| : |BL| = 4 : 3$. Víme, že BL je polovina hrany BC, tedy BP jsou dvě třetiny hrany AB.
Sestrojíme body N a P a narýsujeme řez na síti.

Příklad 4

Krychlového těleso dané plánem na obrázku 4.2 protněte rovinou ENP, kde $P = B{-}\bullet{-}C$. Nakreslete příslušný řez tělesa rovinou ENP a řez vyznačte na síti z obrázku 4.12b.

Řešení

Řezem je desetiúhelník $PSUVTNQREW$ – obrázky 4.29 a 4.30.
<u>Sestrojení řezu.</u> 1. $Q = EN \cap JK$, 2. $R = QP \cap IJ$,
3. $V = ER \cap IH$, 4. $U = ER \cap GH$,
5. $T = NU \cap MH$, 6. $S = NU \cap GC$, 7. $W =$
$= AB \cap p$, kde p je rovnoběžka vedená bodem E s přímkou NU.

Obrázek 4.29:

Řez, který vypadá velice složitě, nakonec jde najít celkem bez potíží. Je to způsobeno členitostí tělesa. Hodně „záhybů“ umožňuje vždy nějaké jednoduché pokračování v hledání řezu. Dodejme, že přesnost rýsování můžeme kontrolovat některými vztahy, které musí být splněny. Například: $WP \| EU$, $NS \| PQ$, $SP \| TV$, $V = R - \bullet - U$, $V = P - \bullet - N$, $Q = N - \bullet - E$, $T = N - \bullet - S$ atd.
<u>Přenos řezu na síť:</u> Podobně jako v příkladu 3 najdeme polohu nových bodů na hranách tělesa. Bod Q je střed hrany JK, V je střed hrany HI a S je střed hrany CG. Velikosti $|GU|$, $|JR|$ a $|BW|$ jsou $\frac{2}{3}$ velikosti $|KN|$. Konečně $|MT| : |MH| =$
$= 3 : 4$. Teď již lehce sestrojíme obrázek 4.30.

Obrázek 4.30:

Výzva 2

Narýsujte desetiúhelník, který je řezem, z příkladu 4 a vypočtěte jeho obvod i obsah za předpokladu že $|KL| = 12$.

Úlohy

1. Zadání příkladu 3 řešte pro sítě z obrázků 4.31a-h.

Obrázek 4.31:

2. Nechť **S** je množina všech rovin souměrnosti krychle. (a) Do sítě z obrázku 4.14e zakreslete všechny řezy krychle rovinami $\beta \in \mathbf{S}$, které neprochází žádným vrcholem krychle. (b) Do sítě z obrázku 4.14g zakreslete všechny řezy krychle rovinami $\beta \in \mathbf{S}$, které prochází aspoň jedním vrcholem krychle. V obou případech zjistěte, kolik takových rovin existuje.
3. Najděte rovinu, která řeže (a) tetraedr, (b) dodekaedr ve čtverci. Kolik takových rovin existuje?
4. Krychli $ABCDEFGH$ se středem $S = C - \bullet - E$ protněte rovinami α, β a δ. Všechny tři roviny jsou kolmé na tělesovou úhlopříčku CE a navíc $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $S \in \delta$. Do sítě z obrázku 4.14c různobarevně vyznačte všechny tři řezy. Popište řezové útvary.
5. Ve volném rovnoběžném promítání nakreslete těleso z obrázku 4.32 a vyznačte na něm řez rovinou (a) BCL, (b) ECK, (c) EFL, (d) BEK, (e) EBL, (f) ECL.

Obrázek 4.32:

6. Najděte rovinu, která řeže ikosaedr v pravidelném desetiúhelníku. Kolik takových rovin existuje?

Výsledky

1. Řešení je na obrázcích 4.33a–h. Útvarem řezu je (a) obdélník, (b) obdélník, (c) rovnostranný trojúhelník, (d) rovnoramenný lichoběžník, (e) kosočtverec, (f) rovnoběžník, (g) pravidelný šestiúhelník, (h) osově souměrný pětiúhelník.

Obrázek 4.33:

2. (a) Takové roviny jsou tři. Viz obrázek 4.34. (b) Takových rovin je šest. Viz obrázky 4.35 a 4.36.

Obrázek 4.34:

Obrázek 4.35:

Obrázek 4.36:

3. (a) Řezová rovina prochází středy čtyř hran – tyto body jsou vrcholy čtverce. Takové roviny jsou tři. (b) Nechť $ABCDE$ a $ABFGH$ jsou dvě sousední stěny dodekaedru se společnou hranou AB. Pak $CFHE$ je čtverec (odpovídající hraně AB). Takových řezů je tolik, kolik je hran dodekaedru, tedy třicet.

4. Rovina α protíná krychli v rovnostranném trojúhelníku AFH. Rovina β protíná krychli v rovnostranném trojúhelníku BGD. Rovina δ protíná krychli v pravidelném šestiúhelníku, hexagonu, jehož vrcholy jsou středy hran AB, BF, FG, GH, HD a DA. Viz obrázek 4.37.

Obrázek 4.37:

5. Řešení jsou na obrázku 4.38a-f. První čtyři konstrukce jsou snadné. Řezy v případech (a), (b) jsou shodné, neboť jsou souměrné podle roviny CDG, která je i rovinou souměrnosti tělesa. Útvar řezu v případě (c) se skládá z obdélníka $MNKL$ a úsečky EF. V případě (d) je útvarem řezu dvojice rovnostranných shodných trojúhelníků. V posledních dvou případech uvedeme i konstrukci:

   (e) $M = EL \cap HI$, $T = KC \cap m$, kde m je rovnoběžka vedená bodem L s přímkou EB, $N = ET \cap GH$.

   (f) $M = EL \cap HI$, $P = AB \cap p$, kde p je rovnoběžka vedená bodem E s přímkou CL, $N = GH \cap q$, kde q je rovnoběžka vedená bodem E s přímkou PC.

6. Nechť A a A' jsou dva dipodální vrcholy ikosaedru (tj. střed S úsečky AA' je středem kulové plochy opsané ikosaedru). Pak rovina procházející středem S kolmo na úsečku AA' řeže ikosaedr v pravidelném desetiúhelníku. Takových řezů je tolik, kolik je dipodálních dvojic vrcholů ikosaedru, tedy šest.

Obrázek 4.38:

4.4 Výpočtová stereometrie

Příklad 5

Povrch šestibokého pravidelného hranolu $H = ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ je dvojnásobkem jeho pláště. Vypište všechny navzájem neshodné trojúhelníky XAY, kde X, Y jsou vrcholy hranolu H. Pro každý takový trojúhelník najděte velikosti jeho stran, úhlů i obsah. Velikosti stran i obsah vyjádřete přesně, úhly s přesností na stupně.

Řešení

Strategie: Nejprve musíme situaci uchopit. Zvolíme délku některé hrany hranolu a najdeme velikosti všech dalších úseček, které budou v úloze vystupovat. Pak vyřešíme kombinatorickou úlohu – utřídit přehledně všechny typy vzájemně neshodných trojúhelníků. Konečně ze znalosti stran trojúhelníka vypočteme jeho úhly i obsah.

Uchopení situace: Bez újmy na obecnosti můžeme volit délku podstavné hrany 2. Pak $|AB| = |AF| = 2$. Označme $v = |AA'|$ výšku hranolu. Pak $Q(H) = 12v$ a $S(H) = 12v + 12\sqrt{3}$. Tedy $2Q(H) = S(H) \Leftrightarrow v = \sqrt{3}$.

Nalezení velikostí všech potřebných úseček: Víme, že $|AD| = 4$ a $|AA'| = \sqrt{3}$. Každou další velikost vypočteme pomocí Pythagorovy věty aplikované na vhodný trojúhelník (ten je vždy připsán v závorce): $|AC| = |AE| = \sqrt{12}$ (ACD), $|AB'| = |AF'| = \sqrt{7}$ (ABB'), $|AC'| =$ $= |AE'| = \sqrt{15}$ (ACC'), $|AD'| = \sqrt{19}$ (ADD'). Známe velikosti všech potřebných úseček.

Organizace množiny všech typů trojúhelníků: Teď vyjasněme, o které trojúhelníky půjde. Poměrně početnou množinu trojúhelníků rozdělíme do tříd podle vhodného kritéria. My jsme volili dělení do čtyř tříd podle délky nejkratší strany trojúhelníka.

• **První třída** obsahuje všechny trojúhelníky, jejichž aspoň jedna strana má délku $\sqrt{3}$, tj. je boční hranou hranolu. Můžeme předpokládat, že je to úsečka AA', protože každou jinou boční hranu lze do hrany AA' přemístit otočením hranolu. Do této třídy patří tři typy trojúhelníků. Reprezentantem prvního typu je trojúhelník $AA'B$. S ním shodné jsou $AA'F$, $AA'B'$ a $AA'F'$. Reprezentantem druhého typu je trojúhelník $AA'C$. S ním shodné jsou $AA'E$, $AA'C'$ a $AA'E'$. Reprezentantem třetího typu je trojúhelník $AA'D$. S ním shodný je pouze $AA'D'$.

• **Druhá třída** obsahuje všechny trojúhelníky, jejichž každá strana má délku větší než $\sqrt{3}$ a aspoň jedna strana má délku 2, tj. je stranou podstavy. Můžeme předpokládat, že je to úsečka AB, neboť každou hranu podstavy lze do úsečky AB přemístit otočením hranolu a případně rovinovou souměrností, která vymění navzájem podstavy M a M'. Např. trojúhelník $AC'D'$, otočíme nejprve do polohy $EA'B'$ a pak rovinovou souměrností převedeme do trojúhelníka ABE'. Do této třídy patří čtyři typy trojúhelníků: ABC, ABD, ABC', ABD'

• **Třetí třída** obsahuje všechny trojúhelníky, jejichž každá strana má délku větší než 2 a aspoň jedna strana má délku $\sqrt{7}$. Můžeme předpokládat, že stranou délky $\sqrt{7}$ je úsečka AB' – zdůvodnění jako výše. Do této třídy patří tři typy trojúhelníků: $AB'C$, $AB'D$, $AB'E$.

• **Čtvrtá třída** obsahuje všechny trojúhelníky, jejichž každá strana má délku větší než $\sqrt{7}$. Jinak řečeno, žádné dva vrcholy takového trojúhelníka neleží na sousedních bočních hranách hranolu. Je-li tedy jedním vrcholem bod A, pak druhý leží na hraně CC' a třetí na hraně EE'. Lehce nahlédneme, že tato třída má pouze dva typy trojúhelníků: ACE a ACE'.

Výpočty: Ze znalostí velikostí stran a, b, c trojúhelníka vypočítáme jeho úhly podle kosinové věty a obsah podle Heronova vzorce, tj. $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (analogicky pro další dva úhly) a $S = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$.
Tyto výpočty ponecháme čtenáři.

Příklad 6

> Narýsujte mnohoúhelník z úlohy 5f, strana 84, jež je řezem. Zjistěte jeho obsah i velikosti všech jeho stran, úhlopříček i úhlů za předpokladu, že $|AB| = 2$. Délky a obsah určete přesně, úhly s přesností na 1°.

Řešení

Vhled: Na obrázku 4.38f je šestiúhelník $PCLMNE$, který je řezem, zobrazen ve volném rovnoběžném promítání. Skutečný tvar šestiúhelníka $PCLMNE$ je na obrázku 4.39a. Ukážeme, jak jsme zjišťovali jeho rozměry.

Výpočty v prostoru: (obrázek 4.38f) Zřejmě $|KL| = |AE| = |EH| = 2$ a $|KC| = |BC| = 4$. V rovnoběžníku $EHLI$ je bod M průsečík úhlopříček, tedy střed. Proto $|IM| = |MH| = 1$. Z rovnoběžnosti přímek EP, MN a LC plyne podobnost trojúhelníků EPA, MNH a CLK. Odtud $|AP| = |PB| = 1$ a $|HN| = \frac{1}{2}$, $|NG| = \frac{3}{4}$. Pomocí Pythagorovy věty aplikované na trojúhelníky BCP, CKL, LIM, HMN, EHN a AEP dostaneme $|CP| = \sqrt{17}$, $|CL| = \sqrt{20}$,

$|LM| = \sqrt{5}$, $|MN| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $|NE| = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $|EP| = \sqrt{5}$.

Z obrázku 4.39a je vidět, že náš postup byl zbytečně dlouhý. Stačilo zjistit $|CP| = \sqrt{17}$, $|CL| = \sqrt{20}$ a vše další již plyne z obrázku: $|EP| = \frac{|LC|}{2}$, $|MN| = \frac{|EP|}{2}$ a $|EN| = \frac{|PC|}{2}$. Dále úsečka LM je shodná s EM, přičemž podle Pythagorovy věty aplikované na trojúhelník EMN je $|EM|^2 = |EN|^2 + |NM|^2 = \frac{17}{4} + \frac{5}{4} = \frac{22}{4}$. Tedy $|LM| = \frac{\sqrt{22}}{2}$. Někde je chyba! Poslední výsledek protiřečí předchozímu výpočtu $|LM| = \sqrt{5}$.

Obrázek 4.39:

Při konstrukci obrázku 4.39a jsme automaticky předpokládali, že úhly EPC a LCP jsou pravé. Toto tvrzení jsme neprověřili a dostali jsme se do pasti. Obrázek 4.39a je špatně. K tomu, abychom mohli obrázek opravit, potřebujeme znát ještě úhel CPE, nebo velikost úsečky CE. To z obrázku 4.38f zjistíme snadno: $|EC|^2 = |EA|^2 + |AC|^2 = 4 + 20 = 24$. Tedy $|EC| = \sqrt{24}$.
Teď již umíme hledaný šestiúhelník nakreslit. Sestrojíme trojúhelník EPC o stranách $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{24}$, pak lichoběžník $EPCL$, pro který je $|LC| = \sqrt{20}$, pak bod $M = E - \bullet - L$ a konečně bod N – viz obrázek 4.39b. Z obrázku 4.38f ještě snadno zjistíme, že $|LP| = \sqrt{33}$ (z pravoúhlého trojúhelníka PDL), $|MC| = \sqrt{17}$, $|MP| = \sqrt{14}$ a $|NC| = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

Výpočty v rovině: Známe všechny délky. Pomocí kosinové věty zjistíme všechny úhly (viz obrázek 4.40a). Z trojúhelníka CEP je $\cos| < CPE| = \frac{|PC|^2+|PE|^2-|CE|^2}{2\cdot|PC|\cdot|PE|} = \frac{17+5-24}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{85}}$, odkud $| < CPE| \doteq 96,227° \doteq 96°$.
Tedy $| < PCL| = | < PEN| \doteq 84°$ a vnitřní úhel v šestiúhelníku při vrcholu N má přibližně velikost $360° - 84° = 276°$. Z rovnoramenného trojúhelníka CEL pro úhel $| < CLE| = \lambda$ platí $\sin(\frac{\lambda}{2}) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{20}}$, tedy $\lambda \doteq 66,422° \doteq 66°$. Pak $| < LMN| \doteq 114°$.
Konečně najdeme obsah zkoumaného šestiúhelníka. Lze použít Heronův vzorec a obsah S najít ze vztahu S $= |ECP| + |ECL| - |MNE|$. Kalkulativně jednodušší a vtipnější je jiný postup. Lichoběžník $PCLE$ rozdělíme na pět trojúhelníků CEP, CER, RNM, ENM a MLR, kde $R = C - \bullet - L$ (obrázek 4.40b).
Nechť S' je obsah trojúhelníka ENM. Pak zřejmě $|RNM| = S'$, $|MLR| = |MER| = 2S'$, $|CEP| = |CER| = |LER| = 4S'$, $|CEL| = 8S'$. Trojúhelník CEL je rovnoramenný se základnou CE délky $\sqrt{24}$. Výška na základnu má velikost $\sqrt{14}$, tedy $8S' = |CEL| = \frac{\sqrt{24}\cdot\sqrt{14}}{2} =$

$= 2 \cdot \sqrt{21}$. Odtud $S' = \frac{\sqrt{21}}{4}$. Obsah šestiúhelníka $PCLMNE$ je $11S' = \frac{11\cdot\sqrt{21}}{4}$.

Obrázek 4.40:

Příklad 7

Každá hrana šestibokého pravidelného hranolu $H_6 = A_1 \dots A_6 A_1' \dots A_6'$ má délku d. Zjistěte vzdálenost přímky $p = A_1A_2$ od roviny $\alpha = A_4A_1'A_5$.

Řešení

Situaci znázorníme na obrázku 4.41a.
Přímka $p = A_1A_2$ je rovnoběžná s přímkou $A_4A_5 \subset \alpha$. Tedy $p \parallel \alpha$. Proto $|p\alpha| = |A_1\alpha|$.

Obrázek 4.41:

Nechť B je pata kolmice vedené bodem A_1 k rovině α. Pak $|A_1B| = |A_1\alpha|$ je hledaná vzdálenost. Pro lepší orientaci si překreslíme obdélník $A_1A_5A_5'A_1'$ a vyznačíme na něm bod B (viz obrázek 4.41b). Úhlopříčka $A_1'A_5$ je průsečnice roviny α s rovinou $A_1A_1'A_5$.
Tvrdíme, že A_1B je výška v trojúhelníku $A_1A_5A_1'$. Máme dokázat, že $A_1B \perp \alpha$, tj. že A_1B je kolmá ke dvěma různoběžkám roviny α. Za tyto různoběžky volíme přímky $A_1'A_5$ a A_4A_5. Kolmost $A_1B \perp A_5A_1'$ plyne z konstrukce bodu B. Zbývá dokázat $A_1B \perp A_4A_5$. Platí $A_1A_5A_1' \perp A_4A_5$. Ale $A_1B \subset A_1A_5A_1'$, proto $A_1B \perp A_4A_5$. Důkaz je hotov.

Výpočet: $|A_1A_5| = d\sqrt{3}$, $|A_1A_1'| = d$, $|A_1'A_5| = 2d$, proto $|A_1B|\cdot 2d = |A_1A_1'|\cdot|A_1A_5| = d^2\sqrt{3}$ (plyne z obsahu trojúhelníka $A_1A_5A_1'$). Odtud $|A_1B| = d\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Výsledek: Hledaná vzdálenost je $d\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Příklad 8

Nechť DP a CQ jsou výšky tetraedru $ABCD$. Zjistěte odchylku přímek $p = AP$ a $q = DQ$.

Poznámka: Odchylku mimoběžek p, q definujeme jako úhel přímek p', q', pro které platí (1) $p' \parallel p$, $q' \parallel q$; (2) p', q' jsou různoběžky (jejich průsečík označme M).

Řešení

Situaci znázorníme na obrázku 4.42a.

Obrázek 4.42:

V uvažované situaci funkci bodu M svěříme bodu P. Pak $p' = p$ a $q' = PF$, kde F je bod úsečky CD takový, že $2|DF| = |FC|$.

Program postupu: 1. Dokážeme, že bod F byl volen správně, tj. že $q' \parallel q$, 2. zjistíme délky stran trojúhelníka APF, 3. zjistíme velikost $\varphi = |<APF|$.

Realizace: Označíme E patu kolmice z D na stranu AB.
1. V trojúhelníku ECD platí $|PC| = \frac{2}{3}|EC|$ a $|FC| = \frac{2}{3}|DC|$, tedy $PF \parallel ED$ (stejnolehlost se středem C a koeficientem $\frac{2}{3}$). Tedy opravdu $q' \parallel q$.

2. $|AB| = a$, $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (DE je výška v rovnostranném trojúhelníku ABC), $|AP| = |DQ| = \frac{2}{3}|DE| = \frac{1}{\sqrt{3}}a$, $|FP| = \frac{2}{3}|DE| = \frac{1}{\sqrt{3}}a$ (neboť $|PF| : |FC| = |DE| : |DC|$),
$|AF|^2 = |AD|^2 + |DF|^2 - 2|AD||DF|\cos 60°$ (kosinová věta v trojúhelníku ADF),
$|AF|^2 = a^2 + \frac{1}{9}a^2 - 2\frac{1}{3}a^2\frac{1}{2} = \frac{7}{9}a^2$, tedy $|AF| = a\frac{\sqrt{7}}{3}$.
3. Označme $\frac{a}{3} = t$. Pak zjištěnou situaci znázorňuje obrázek 4.42b.
Z obrázku ihned vidíme, že $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{12}}$, tedy $\frac{\varphi}{2} = \arcsin\sqrt{\frac{7}{12}}$, odkud $\varphi \doteq 99,594°$, a tedy $|<p', q'| = 180° - \varphi \doteq 80,406° = 80°24'21''$.

Výsledek: Odchylka přímek AP a DQ je $80°24'21''$.

Úlohy

V úlohách 1 – 18 délky, obsahy a objemy najděte přesně, úhly s přesností na $1'$ (pokud není řečeno jinak).

1. Zjistěte vzdálenost každého vrcholu krychle $ABCDEFGH$ o hraně $\sqrt{3}$ od roviny $\gamma = BEG$.

2. Zjistěte vzdálenost vrcholu F krychle $ABCDEFGH$ o hraně $\sqrt{6}$ od přímky (a) AH, (b) DG, (c) AG, (d) AC, (e) CD.

3. Je dán tetraedr $ABCD$ o hraně 2, body $E = A - \bullet - B$, $F = C - \bullet - D$, $G = B - \bullet - C$, přímka $p = EF$ a roviny $\alpha = ABC$, $\beta = EFG$. Zjistěte vzdálenosti (a) $|pA|$, (b) $|D\alpha|$, (c) $|pG|$, (d) $|D\beta|$, (e) $|F\alpha|$.

4. Každá hrana šestibokého pravidelného hranolu $H_6 = A_1 \dots A_6 A'_1 \dots A'_6$ má délku d. Zjistěte vzdálenost přímky $p = A_1A_2$ od roviny (a) $A'_1A'_2A'_3$, (b) $A_4A'_4A_5$, (c) $A_4A_5A'_6$, (d) $A_3A'_3A_6$, (e) $A'_3A'_5A_3$.

5. Je dán pravidelný šestiboký jehlan $J_6 = A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$. Označme rovinu $\gamma = A_1A_2V$, přímku $p = A_1V$, bod $S = A_1 - \bullet - A_4$ a délky $|A_1A_2| = a$, $|SV| = v$. Zjistěte vzdálenosti (a) $|\gamma A_3|$, (b) $|\gamma A_4|$, (c) $|pA_2|$, (d) $|pA_3|$, (e) $|pA_4|$.

6. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte odchylku přímek DF a (a) AB, (b) CG, (c) CE, (d) BH, (e) BE, (f) AC.

7. Nechť DP a CQ jsou výšky tetraedru $ABCD$. Zjistěte odchylku přímek (a) AD a CQ, (b) AB a CQ, (c) PQ a CD, (d) AP a CD, (e) DQ a CP, (f) DP a CQ.

8. Každá hrana šestibokého pravidelného hranolu $H_6 = A_1 \dots A_6 A'_1 \dots A'_6$ má délku 1. Zjistěte odchylku přímek (a) $A_2A'_2$ a A_1A_4, (b) $A_2A'_3$ a A_5A_6, (c) $A_1A'_3$ a $A'_4A'_6$, (d) $A_1A'_4$ a A_2A_4, (e) $A_2A'_1$ a A'_3A_4.

9. Jakých hodnot nabývá odchylka mimoběžných hran (a) tetraedru, (b) hexaedru, (c) oktaedru, (d) dodekaedru, (e) ikosaedru?

10. Nechť $ABCDEFGH$ je kolmý hranol. Najděte vazbu mezi čísly $\cos|\sphericalangle GAB|$, $\cos|\sphericalangle GAD|$, $\cos|\sphericalangle GAE|$.

11. Je dán kolmý hranol $ABCDEFGH$ s rozměry $|AB| = 2$, $|AD| = 1$, $|AE| = 3$. Zjistěte odchylku roviny BCH a přímky (a) BG, (b) FH, (c) AG.

12. V kolmém pravidelném čtyřbokém hranolu $ABCDA'B'C'D'$ je $|AB| = \sqrt{6}$. Odchylka přímky AB' od BC' je stejná jako od BD'. Zjistěte $|AA'|$.

13. Pravidelný šestiboký hranol $H = ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ je opsán ploše kulové. Vypište všechny navzájem neshodné trojúhelníky AXY, kde X, Y jsou vrcholy hranolu H. Pro každý takový trojúhelník najděte velikosti jeho stran, úhlů (s přesností na $1°$) i obsah.

14. Pro osmistěn $ABCDEFGHI$ (viz obrázek 4.43) platí: stěna $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník, stěny $ABHG$, $CDIH$ a $EFGI$ jsou čtverce a $|AB| = 1$. Najděte objem tělesa.

Obrázek 4.43:

15. Dvě hrany čtyřstěnu mají délku p a čtyři mají délku q. Určete objem V tělesa. Uvažujte všechny možnosti.

16. Vraťme se k úloze 5 strana 84. Případ (f) byl zkoumán v příkladu 6. Stejně prozkoumejte případy (a)–(e): řezový útvar narýsujte, zjistěte jeho obsah i velikosti všech jeho stran, úhlopříček i úhlů za předpokladu, že $|AB| = 2$. Délky a obsah určete přesně, úhly s přesností na $1°$.

17. Pro tetraedr $ABCD$ s hranou délky a vypočtěte (a) poloměr R kulové plochy opsané, (b) poloměr r kulové plochy vepsané, (c) povrch, (d) objem, (e) velikost α úhlu sousedních stěn.

18. Předchozí úlohu řešte pro oktaedr.

19. V pravidelném n-bokém hranolu H_n známe délku hrany $a = |A_1A_2|$ a výšku v. Zjistěte $Q(H_n)$, $S(H_n)$, $V(H_n)$ pro (a) $n = 4$, (b) $n = 3$, (c) $n = 6$, (d) $n = 5$. Rada: $\sin 36° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

20. Stejnou úlohu řešte pro pravidelný n-boký jehlan J_n.

21. Najděte plášť, povrch i objem jehlanu J_4, resp. J_5, jehož síť je na obrázku (a) 4.20a, (b) 4.20b.

22. Na obrázcích 4.31 je krychle rozříznuta rovinou vždy na dvě části. Vypočtěte poměr objemů těchto částí pro případy (a)–(g).

Výsledky

1. $|\gamma B| = |\gamma E| = |\gamma G| = 0$, $|\gamma A| = |\gamma C| = |\gamma H| = |\gamma F| = 1$, $|\gamma D| = 2$.
2. (a) 3, (b) $\sqrt{6}$, (c) 2, (d) 3, (e) $\sqrt{12}$.
3. (a) 1, (b) $2\sqrt{\frac{2}{3}}$, (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, (e) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
4. (a) d, (b) $d\sqrt{3}$, (c) $2d\sqrt{\frac{3}{7}}$, (d) $\frac{d\sqrt{3}}{2}$, (e) nemá smysl.
5. (a) $\frac{av\sqrt{3}}{\sqrt{4v^2+3a^2}}$, (b) $\frac{2av\sqrt{3}}{\sqrt{4v^2+3a^2}}$, (c) $\frac{a\sqrt{4v^2+3a^2}}{2\sqrt{v^2+a^2}}$, (d) $\frac{a\sqrt{12v^2+3a^2}}{2\sqrt{v^2+a^2}}$, (e) $\frac{2av}{\sqrt{v^2+a^2}}$.
6. (a) $54°44'$, (b) $54°44'$, (c) $70°32'$, (d) $70°32'$, (e) $90°$, (f) $90°$.
7. (a) $90°$, (b) $90°$, (c) $0°$, (d) $73°13'$, (e) $70°32'$, (f) $70°32'$.
8. (a) $90°$, (b) $45°$, (c) $30°$, (d) $39°14'$, (e) $75°31'$.
9. (a) $90°$, (b) $90°$, (c) $60°$, (d) $30°, 36°, 72°, 90°$, (e) $36°, 60°, 72°, 90°$.
10. $|AB|^2 + |AD|^2 + |AE|^2 = |AG|^2$. Vydělíme vztah číslem $|AG|^2$ a dostaneme hledaný vztah: $1 = \frac{|AB|^2}{|AG|^2} + \frac{|AD|^2}{|AG|^2} + \frac{|AE|^2}{|AG|^2}$, tedy $\cos^2 |< GAB| + \cos^2 |< GAD| + \cos^2 |< GAE| = 1$.
11. (a) $31°45'$, (b) $48°05'$, (c) $62°49'$.
12. $|AA'| = \sqrt{\sqrt{13} - 1}$
13. Zvolme délku podstavné hrany 1. Pak $|AB| = |AF| = 1$, $|AC| = |AE| = \sqrt{3}$, $|AD| = 2$. Uvědomíme si, že se jedná o hranol opsaný ploše kulové. Jeho výška se tedy musí rovnat průměru plochy kulové. Zároveň je tento průměr roven vzdálenosti např. hran AB a ED, tj. průměr plochy kulové je $\sqrt{3}$. Tedy $v = |AA'| = \sqrt{3}$, $|AB'| = |AF'| = 2$, $|AC'| = |AE'| = \sqrt{6}$, $|AD'| = \sqrt{7}$.

Organizace množiny trojúhelníků: Trojúhelník AXY patří do třídy (1), právě když $X = A'$, (2), právě když $X = B$ a $Y \neq A'$, (3), právě když $X = B'$ a $Y \neq A', B$, (4), právě když nepatří do žádné z tříd (1), (2) a (3).

Výpočty ponecháme čtenáři.

14. $V = \frac{5\sqrt{2}}{6}$. Poznámka: Vraťte se k úloze 4, strana 84. Těleso na obrázku 4.43 je totožné s tělesem, které z krychle vytnou roviny δ a ϵ, kde ϵ je rovina kolmá na úhlopříčku CE a procházející středem hrany BC.

15. Nastávají dva případy. Jsou-li hrany délky p protilehlé, pak $V = p^2 \cdot \frac{\sqrt{2q^2-p^2}}{6\sqrt{2}}$, když jsou hrany délky p sousední, pak $V = \frac{p}{12} \cdot \sqrt{4p^2q^2 - p^4 - q^4}$.

16. Užíváme výsledků řešení úlohy 4, strana 84 a obrázků 4.38a–e. (a) Viz obrázek 4.44a. (b) Jako předešlý případ, ale vrcholy nutno přejmenovat. (c) Řezem není mnohoúhelník, proto nutno nejprve diskutovat zadání úlohy. Co zde máme rozumět pod pojmy „úhlopříčka“, „strana“, „úhel“? Nebudeme se pokoušet zavádět vlastní definice a řešení rozložíme do dvou částí. Nejprve útvar řezu přesně narýsujeme, pak se omezíme na tu část řezu, která je mnohoúhelníkem, tj. na obdélník $KLMN$ (viz obrázek 4.44b). (d) Ani útvar na obrázku 4.44c není mnohoúhelník, protože má vrchol (je to vrchol G), z něhož vychází čtyři strany. To definice mnohoúhelníka nepřipouští. (e) Viz obrázek 4.45.

Obrázek 4.44:

Obrázek 4.45:

Dopočítání ostatních hledaných údajů přenecháme čtenáři.

17. (a) $R = a \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$, (b) $r = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{6}}$, (c) $S = a^2 \cdot \sqrt{3}$, (d) $V = \frac{a^3}{6 \cdot \sqrt{2}}$, (e) $\alpha \doteq 70°32'$.

18. (a) $R = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, (b) $r = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{6}$, (c) $S = a^2 \cdot \sqrt{12}$, (d) $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$, (e) $\alpha \doteq 70°32'$. Není překvapivé, že úhel sousedních stěn tetraedru je stejný jako úhel sousedních stěn oktaedru? Nemáme tam chybu?

19. (a) $Q(H_4) = 4av$, $S(H_4) = 4av + 2a^2$, $V(H_4) = va^2$,

    (b) $Q(H_3) = 3av$, $S(H_3) = 3av + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $V(H_3) = \frac{\sqrt{3}}{4}va^2$,

    (c) $Q(H_6) = 6av$, $S(H_6) = 6av + 3\sqrt{3}a^2$, $V(H_6) = \frac{3\sqrt{3}}{2}va^2$,

    (d) $Q(H_5) = 5av$, $S(H_5) = 5av + \frac{5}{2}a^2\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$, $V(H_5) = \frac{5}{4}va^2\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

20. Vždy počítáme i pomocnou délku w – výšku VK boční stěny.

    (a) $Q(J_4) = 2aw$, $S(J_4) = 2aw + a^2$, $V(J_4) = \frac{va^2}{3}$, $w = \sqrt{v^2 + \frac{a^2}{4}}$,

    (b) $Q(J_3) = \frac{3}{2}aw$, $S(J_3) = \frac{3}{2}aw + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $V(J_3) = \frac{\sqrt{3}}{12}va^2$, $w = \sqrt{v^2 + \frac{a^2}{12}}$,

    (c) $Q(J_6) = 3aw$, $S(J_6) = 3aw + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, $V(J_6) = \frac{3\sqrt{3}}{2}va^2$, $w = \sqrt{v^2 + \frac{3}{4}a^2}$,

    (d) $Q(J_5) = \frac{5}{2}aw$, $S(J_5) = \frac{5}{2}aw + \frac{5}{2}a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}$, $V(J_5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}v$, $w = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20} \cdot a^2 + v^2}$.

21. (a) $Q(J_4) = \sqrt{3}d^2$, $S(J_4) = (1+\sqrt{3})d^2$, $V(J_4) = \sqrt{2}\frac{d^3}{6}$, (b) $Q(J_5) = 5\sqrt{3}\frac{d^2}{4}$, $S(J_5) =$ $= \frac{5d^2}{4}(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} + \sqrt{3})$, $V(J_5) = \frac{5+\sqrt{5}}{24}d^3$.
22. (a) $1:1$, (b) $3:1$, (c) $5:1$, (d) $17:7$, (e) $1:1$, (f) $1:1$, (g) $1:1$.

Obsah