buovat" k členům implikace a očekávat, že se tím význam výroku nezmění a že se zachová i jeho pravdivostní hodnota.

Obecné logické základy odvozování (včetně věty o dedukci) shrnuje text na str. 45, který budeme ještě komentovat v článku 2.2. Svou přípravu na odvozování dokončíme v úlohách 1 až 7, kde si připomeneme dovednosti, které jsme už získali při ověřování tzv. tautologií a správnosti úsudků ve výrokové logice (pomocí tabulek) a v predikátové logice (pomocí Vennových diagramů).

Úlohy

1. Vyslovte správné negace daných výroků na základě jejich slovní formulace i symbolického zápisu:
  a) Pro každé přirozené k má rovnice $kx^2 = k^2 + 1$ aspoň jeden reálný kořen.
  b) Pro každé reálné číslo x platí, že $\sqrt{x} \leq x$.
  c) K žádným třem konvexním útvarům v dané rovině neexistuje kruh, který má s každým z nich průnik o témž obsahu.
  d) H_1, H_2 v příkladu 3.

2. Vyslovte negace konjunkce, alternativy, implikace a ekvivalence výroků na základě formulací úmluv o jejich pravdivosti na str. 38.

3. Na základě definic vztahů a operací s množinami vyslovte výroky s kvantifikátory, které o určitých podmnožinách A, B množiny U řeknou to, co je symbolicky zapsáno:
  a) $\mathsf{A} \not\subset \mathsf{B}$ b) $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$ c) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \neq \emptyset$ d) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \neq \mathsf{U}$
  e) $\mathsf{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ f) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset \Leftrightarrow \mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{U}$ g) $\mathsf{A} \subset \mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{B} = \mathsf{U}$
  Potom vyslovte negace zapsaných výroků.

4. Napište záhlaví tabulky pro pravdivostní ohodnocení formulí X, Y, X', Y', $X \Rightarrow Y$, $Y' \Rightarrow X'$, $X \wedge Y'$, $Y \Rightarrow X$, $X' \Rightarrow Y'$, $X' \vee Y$, $X \vee Y'$ a tabulku vyplňte. Vyhledejte ty sloupce tabulky, které vyjadřují stejná ohodnocení, resp. právě opačná ohodnocení formulí. Vyslovte logické zákony, které jsou tím ověřeny.

5. Použijte ty sloupce tabulky vyplněné v úloze 4, které potřebujete k rozhodnutí o správnosti daných úsudků:
  a) $\dfrac{X \Rightarrow Y \quad X}{Y}$ b) $\dfrac{X \Rightarrow Y \quad Y'}{X'}$ c) $\dfrac{X \Rightarrow Y \quad Y}{X}$ d) $\dfrac{X \Rightarrow Y \quad X'}{Y'}$

***6.** Úvahu v příkladu 3 absolvujte v případě, že posuzujeme jen složená čísla (a ne všechna přirozená čísla). Nezapomeňte na množinové vyjádření úvahy o hypotézách.

7. Použijte množinová vyjádření a grafická znázornění daných úsudků, které umožňují rozhodnout o jejich správnosti:

a) $$\begin{array}{l} \forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow B(x) \\ \forall x \in \mathsf{U}\colon B(x) \Rightarrow C(x) \\ \hline \forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow C(x) \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} \forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow B(x) \\ \forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \\ \hline \forall x \in \mathsf{U}\colon B(x) \end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} \forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow B(x) \\ \exists x \in \mathsf{U}\colon B'(x) \\ \hline \exists x \in \mathsf{U}\colon A'(x) \end{array}$$

d) $$\begin{array}{l} \forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow B(x) \\ \forall x \in \mathsf{U}\colon B'(x) \\ \hline \forall x \in \mathsf{U}\colon A'(x) \end{array}$$

2.2 Přímé důkazy a jejich konstrukce

Na str. 45 si můžeme přečíst, jak výroková logika charakterizuje důkaz a jeho konstrukci pomocí pravidel dosazování a odloučení. Pravidlo odloučení je ilustrováno dvěma případy (mody), které se nejčastěji uplatňují.

Ve vyučování matematice podáváme zjednodušené charakteristiky důkazů, využíváme představu o řetězci (na sebe navazujících) implikací zapisovaném
$B_1 \Rightarrow B_2$, $B_2 \Rightarrow B_3$, ..., $B_{k-1} \Rightarrow B_k$, stručně také $B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_k$.
Toto jednoduché schéma užíváme i v situacích, kdy „ve hře" jsou výroky s kvantifikátory a kdy struktura úsudků je daleko složitější. Uvědomme si, že kromě průhledného úsudku I běžně pracujeme (například při řešení rovnic postupnými úpravami) s úsudkem II:

I $$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ \hline A \Rightarrow C \end{array}$$

II $$\begin{array}{l} \forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow B(x) \\ \forall x \in \mathsf{U}\colon B(x) \Rightarrow C(x) \\ \hline \forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow C(x) \end{array}$$

V této učebnici se seznámíme se schématy důkazů poněkud hlouběji v přehledných tabulkách, zatímco v řešených příkladech jen v didakticky únosné míře.

Na str. 44 jsou zapsána schémata přímých důkazů dvou typů výroků, které jsou v matematice nejčastější. Při jejich srovnání si snadno uvědomíme tyto skutečnosti:
- Nalézt přímý důkaz znamená sestrojit řetězec implikací.
- Důkazy těch výroků, které už samy implikaci obsahují, se jeví jako snazší, protože hledaný řetězec má daný začátek a konec. (Tato okolnost však může být i „svazující", a tedy nevýhodná.)
- Důkazy výroků, které mají neznámý začátek řetězce, proto vyžadují určitou fázi, ve které nějaký možný začátek řetězce hledáme a najdeme. Tuto fázi nazveme *rozbor* a budeme hovořit *o přímém důkazu na základě rozboru.*

I Přímý důkaz výroku obsahujícího **implikaci**		
Dokazujeme, že $A \Rightarrow B$		**Dokazujeme, že** $\forall x \in \mathrm{U}: A(x) \Rightarrow B(x)$
$A \Rightarrow B_1$ $B_1 \Rightarrow B_2$	1. Vyhledáme řetězec platných implikací	$\forall x \in \mathrm{U}: A(x) \Rightarrow B_1(x)$ $\forall x \in \mathrm{U}: B_1(x) \Rightarrow B_2(x)$
$\underline{B_n \Rightarrow B}$		$\underline{\forall x \in \mathrm{U}: B_n(x) \Rightarrow B(x)}$
$A \Rightarrow B$	2. Uzavřeme, že platí	$\forall x \in \mathrm{U}: A(x) \Rightarrow B(x)$
II Přímý důkaz výroku neobsahujícího implikaci		
Dokazujeme, že platí V		Dokazujeme, že platí $\forall x \in \mathrm{U}: V(x)$
A	1. Vyhledáme či zvolíme pravdivý výrok	$\forall x \in \mathrm{U}: A(x)$
$A \Rightarrow V$	2. Dokážeme (podle I), že platí	$\forall x \in \mathrm{U}: A(x) \Rightarrow V(x)$
V	3. Uzavřeme, že platí	$\forall x \in \mathrm{U}: V(x)$

Pravidlo dosazování

- Dosadíme-li za libovolnou proměnnou ve formulaci zákona výrokové logiky jinou výrokovou proměnnou nebo správně utvořenou formuli výrokové logiky, a to vždy na všech místech jejího výskytu, získáme opět zákon výrokové logiky.

Pravidlo odloučení

● Jestliže platí implikace $A \Rightarrow B$ a přitom platí výrok A,	$A \Rightarrow B$ A	$B' \Rightarrow A'$ B'
pak nutně platí výrok B. (Vpravo jsou zapsány dvě aplikace pravidla.)	B (modus ponens)	A' (modus tolens)

Pravidlo odvozování

- Jestliže platí výroky, ze kterých vycházíme při odvozování, pak platí i všechny výroky, které při odvozování získáme.

Věta o dedukci

Konečná posloupnost formulí $B_1, B_2, \dots, B_m$ se nazývá *důkazem* formule B_m z předpokladů $A_1, A_2, \dots, A_n$ právě když pro každé $i = 1, 2, \dots, m$ platí (1) nebo (2) nebo (3) nebo (4):

(1) B_i je jednou z formulí $A_1, A_2, \dots, A_n$,

(2) B_i je axiómem nebo vznikla z axiómu pomocí pravidla dosazování,

(3) B_i je formule získaná pomocí pravidla odloučení z formulí B_j a B_k, kde $j < i$, $k < i$,

(4) B_i je formule získaná z formule B_j, kde $j < i$, pomocí pravidla dosazení v případě, že proměnná, za kterou jsme dosadili, se nevyskytuje v žádné z formulí $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Ukázky v řešených příkladech zvolíme nejprve z aritmetiky, algebry a teorie funkcí, kde lze zadání i řešení úsporně zapsat pomocí běžné symboliky.

Příklad 1

Dokažte, že platí: $\mathrm{tg}\ 10° \in \mathrm{Q} \Rightarrow \cos 20° \in \mathrm{Q}$.

Řešení. Klíčem ke konstrukci potřebného řetězce implikací je konstrukce výrazu $\cos 20°$ pomocí čísla $\mathrm{tg}\ 10°$. Použijeme obecný vzorec

$$\cos 2x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} \text{ platný pro každé } x \neq (2k + 1) \cdot 90°,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Důkazem dané implikace je pak tento řetězec implikací:

$$\operatorname{tg} 10^\circ \in \mathrm{Q} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 10^\circ \in \mathrm{Q} \Rightarrow (1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ \in \mathrm{Q}) \wedge (1 + \operatorname{tg}^2 10^\circ \in \mathrm{Q}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 10^\circ} \in \mathrm{Q} \Rightarrow \cos 20^\circ \in \mathrm{Q}$$

Pravdivost jednotlivých implikací je založena na dosazování do obecných vět o operacích s racionálními čísly. (Citujte tyto věty a uvádějte dosazovaná racionální čísla.)

Poznámka. Pravidlo dosazování má v matematice široké uplatnění právě *při důkazech vět o jednotlivých objektech*, tj. těch vět, v jejichž textu se nevyskytuje žádná proměnná. Naše znalosti z algebry, trigonometrie a teorie funkcí jsou totiž vyjádřeny obecnými větami s proměnnými, takže potřebné vztahy pro jednotlivá čísla a funkce získáváme dosazováním.

Příklad 2

Dokažte větu: $\forall x, y \in \mathrm{R}$: $x^2 + y^2 \leqq 2 \Rightarrow |x + y| \leqq 2$

Řešení. Konstrukce přímého důkazu spočívá v konstrukci sledu úprav, jež vycházejí z nerovnice $x^2 + y^2 \leqq 2$, jsou proveditelné pro všechny $x, y \in \mathrm{R}$ a vedou k nerovnici $|x + y| \leqq 2$. Lze postupovat takto:

$$x^2 + y^2 \leqq 2 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) \leqq 4 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 \leqq 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x + y)^2 + (x - y)^2 \leqq 4 \Rightarrow (x + y)^2 \leqq 4 \Rightarrow |x + y| \leqq 2$$

(Obvyklejším zápisem sledu úprav je sloupec nerovnic; v něm však není zvykem zapisovat znaky implikace, a ztrácí se tak představa řetězce implikací.)

V obou dosud řešených příkladech jsme poznali, že přímý důkaz dané implikace bývá krátký, pokud obsahuje účelné úpravy a obraty. Ty však zpravidla ovládá až zkušený znalec příslušné tematiky, ne student-začátečník. Proto *přímé důkazy mnoha implikací lze považovat spíše za konečné podoby důkazů než za první objevitelské verze důkazů, které by řešitel měl a mohl sestavit.* V nemenší míře to platí o důkazech výroků, které nemají tvar implikace.

Přímé důkazy sestrojené na základě rozboru

Podstatou rozboru při každé objevitelské práci je vyvozování důsledků z předpokladu, že hledaný objekt, vztah je znám. Důsledky zaměřujeme k hlubšímu poznání vazeb hledaného ke známému. Tento postup má vysokou heuristickou hodnotu.

Rozbor při řešení úlohy „Dokažte výrok V“

1. Vyvozujeme důsledky z předpokladu, že V platí:
   V, $V \Rightarrow C_1$, $C_1 \Rightarrow C_2$, ..., $C_k \Rightarrow A$
2. Rozbor ukončíme, dojdeme-li k výroku A, jehož pravdivost je nám známa.

Důkaz výroku V se pak *pokusíme* sestrojit jako řetězec obrácených implikací:

A, $A \Rightarrow C_k$, ..., $C_2 \Rightarrow C_1$, $C_1 \Rightarrow V$, tedy V

Pokud jsme úspěšní, získali jsme důkaz výroku V na základě rozboru.

Příklad 3

Dokažte, že platí: $\sqrt{7 + \sqrt{7}} \geqq 1 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}$

Řešení. Složitá stavba výrazů už napovídá, že je lze snadněji zjednodušovat (při úpravách nerovnosti) než konstruovat; takovou konstrukci však objevíme.

Rozbor. Vyvodíme důsledky z předpokladu, že daný výrok platí.

$$\sqrt{7 + \sqrt{7}} \geqq 1 + \sqrt{7 - \sqrt{7}} \Rightarrow 7 + \sqrt{7} \geqq 8 + 2\sqrt{7 - \sqrt{7}} - \sqrt{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{7} - 1 \geqq 2\sqrt{7 - \sqrt{7}} \Rightarrow 29 - 4\sqrt{7} \geqq 4(7 - \sqrt{7}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 29 \geqq 28 \Rightarrow 1 \geqq 0$$

Důkaz na základě rozboru:

$$1 \geqq 0 \Rightarrow 29 \geqq 28 \Rightarrow 29 - 4\sqrt{7} \geqq 4(7 - \sqrt{7}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2\sqrt{7} - 1)^2 \geqq 4(7 - \sqrt{7}) \Rightarrow 2\sqrt{7} - 1 \geqq 2\sqrt{7 - \sqrt{7}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7 + \sqrt{7} \geqq 1 + 2\sqrt{7 - \sqrt{7}} + 7 - \sqrt{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7 + \sqrt{7} \geqq (1 + \sqrt{7 - \sqrt{7}})^2 \Rightarrow \sqrt{7 + \sqrt{7}} \geqq 1 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}$$

Při obráceném postupu musíme provádět úpravy, které vedou od jednoduššího výrazu ke složitějšímu, často vytváříme druhé mocniny dvojčlenů a ty odmocňujeme (pokaždé se ujistíme, že základ mocniny je nezáporný). Nalezli jsme vhodný začátek řetězce — platný výrok $1 \geqq 0$ — a sestrojili jsme řetězec implikací, který končí dokazovaným výrokem. Daný výrok je dokázán přímým důkazem.

Poznámka. Čím úsporněji (tj. slučováním několika úprav, výpočty zpaměti, bez zapisování operací) provedeme rozbor, tím obtížněji konstruujeme důkaz při obracení úprav. Proto je účelné zapsat rozbor podrobně, s malými „kroky“.

Příklad 4

Dokažte větu: $\forall x \in \mathrm{R}$: $\dfrac{x^2}{1 + x^4} \leqq \dfrac{1}{2}$, a to přímým důkazem.

Řešení. Opět provedeme nejprve rozbor, ale sled úpravami získaných nerovnic zapíšeme už ve sloupci, jak bývá obvyklé.

Rozbor

Pro každé $x \in \mathsf{R}$ platí:

Je-li $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leqq \dfrac{1}{2}$,
pak $2x^2 \leqq 1 + x^4$,
pak $0 \leqq 1 - 2x^2 + x^4$,
pak $0 \leqq (1 - x^2)^2$.
Poslední nerovnice platí pro každé $x \in \mathsf{R}$.

Důkaz. Platí $\forall x \in \mathsf{R}$: $0 \leqq (1 - x^2)^2$.
Pro každé $x \in \mathsf{R}$ platí:
Je-li $0 \leqq (1 - x^2)^2$,
pak $0 \leqq 1 - 2x^2 + x^4$,
pak $2x^2 \leqq 1 + x^4$,
pak $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leqq \dfrac{1}{2}$.

Závěr: $\forall x \in \mathsf{R}$: $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leqq \dfrac{1}{2}$

Podali jsme přímý důkaz dané věty, a to na základě rozboru, který nám ukázal začátek vhodného řetězce implikací.

Poznámka. Při zběžném způsobu zapisování důkazů se obvykle už neopisuje sloupec nerovnic v opačném pořadí, ale jen se šipkou „zdola nahoru" naznačí, že jsme prověřili řetězec obrácených implikací. Nikdy však neškodí, když tuto skutečnost také vyjádříme slovy a zapíšeme. Bez tohoto dovětku by vlastně nebyl žádný důkaz podán.

Přímé důkazy založené na geometrické konstrukci

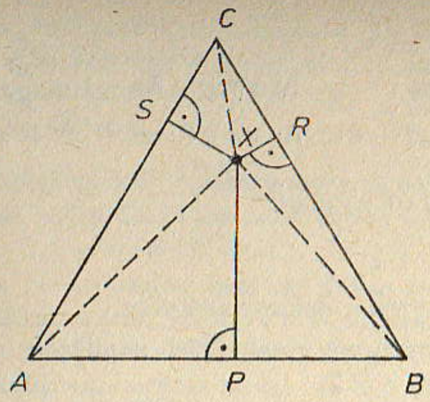
V algebře jsme jejím kalkulem cvičeni ve zjednodušování, tj. v určité *destrukci* daných výrazů; prakticky vůbec neprocvičujeme opačné postupy. Proto nám při důkazech nerovnic tolik pomáhá *rozbor*, který nás vede k jednodušším výrazům, o jejichž hodnotách už něco víme. V geometrii se historicky vyvinula opačná tendence — sestrojovat útvary z údajů o jejich částech; tato konstrukční činnost může být oporou pro snadnější nalezení přímých důkazů v geometrii než v jiných odvětvích matematiky. Často stačí doplnit v obrázku nějaké úsečky a získáme nové obrazce, které umožňují zjistit vztahy, o něž v úloze jde.

Příklad 5

Dokažte, že v každém rovnostranném trojúhelníku mají všechny jeho vnitřní body týž součet vzdáleností od tří stran.

Řešení. Narýsujeme jeden rovnostranný trojúhelník ABC (obr. 2.2) a libovolný bod X jeho vnitřku. Text úlohy nás nabádá k vyznačení vzdáleností bodu X od stran AB, BC, CA; zakreslíme tedy úsečky XP, XR, XS kolmé ke stranám. To jsou ale výšky v trojúhelnících ABX, BCX, CAX (dokreslíme strany AX, BX, CX); výšky slouží k výpočtu obsahů trojúhelníků.

Popsaný sled úvah nám může vnuknout myšlenku, že obsah trojúhelníku ABC (v dané situaci konstantní) se rovná součtu obsahů tří trojúhelníků ABX, BCX, CAX, které jsou proměnlivé (závisejí na $|XP|$, $|XR|$, $|XS|$).



Obr. 2.2

Platí $\dfrac{1}{4}\,|AB|^2 \,.\, \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}\,|AB| \,.\, (|XP| + |XR| + |XS|)$,

a tedy $\dfrac{1}{2}\,|AB| \,.\, \sqrt{3} = |XP| + |XR| + |XS|$.

Popsaná úvaha je přímým důkazem vyslovené věty.

Přímé důkazy v geometrii podáváme obvykle volným textem, ve kterém sledujeme genetický postup při vytváření doprovodného obrázku:

— zakreslujeme a označujeme všechny body, úsečky a úhly, přímky, kružnice atd., o které se v textu dokazované věty přímo jedná,

— postupně doplňujeme body, úsečky, úhly atd., které napomáhají k vyznačení nových „celků", jež poskytují další užitečné vztahy.

Řetězec implikací zjevně nevyznačujeme, lze ho však „vystopovat" v textu. Konstrukce důkazu zprvu sleduje konstrukci úplného ilustračního obrázku, v závěru pak odvození potřebných vztahů. Delší a složitější přímé důkazy obsahují číslované vztahy, např. (1), (2) atd., které také naznačují řetězec implikací.

Úlohy

1. Přímým důkazem ověřte, že platí:

a) $\operatorname{cotg} 20° \in \mathsf{Q} \Rightarrow \cos 40° \in \mathsf{Q}$ b) $\operatorname{cotg} 20° \in \mathsf{Q} \Rightarrow \sin 40° \in \mathsf{Q}$
c) $\cos 36° - \cos 72° = 0{,}5$ d) $\cos 36° \,.\, \cos 72° = 0{,}25$

2. Přímým důkazem na základě rozboru ověřte, že platí:

a) $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2$ b) $\dfrac{1}{\log_2 3} + \dfrac{1}{\log_4 3} < 2$

c) $\sqrt{11 + \sqrt{10}} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$

d) $\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{6}} < 2 + \sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{6}}$