buovat" k členům implikace a očekávat, že se tím význam výroku nezmění a že se zachová i jeho pravdivostní hodnota.

Obecné logické základy odvozování (včetně věty o dedukci) shrnuje text na str. 45, který budeme ještě komentovat v článku 2.2. Svou přípravu na odvozování dokončíme v úlohách 1 až 7, kde si připomeneme dovednosti, které jsme už získali při ověřování tzv. tautologií a správnosti úsudků ve výrokové logice (pomocí tabulek) a v predikátové logice (pomocí Vennových diagramů).

Úlohy

1. Vyslovte správné negace daných výroků na základě jejich slovní formulace i symbolického zápisu:
a) Pro každé přirozené k má rovnice $kx^2 = k^2 + 1$ aspoň jeden reálný kořen.
b) Pro každé reálné číslo x platí, že $\sqrt{x} \leq x$.
c) K žádným třem konvexním útvarům v dané rovině neexistuje kruh, který má s každým z nich průnik o témž obsahu.
d) H_1, H_2 v příkladu 3.

2. Vyslovte negace konjunkce, alternativy, implikace a ekvivalence výroků na základě formulací úmluv o jejich pravdivosti na str. 38.

3. Na základě definic vztahů a operací s množinami vyslovte výroky s kvantifikátory, které o určitých podmnožinách A, B množiny U řeknou to, co je symbolicky zapsáno:
a) $\mathsf{A} \not\subset \mathsf{B}$ b) $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$ c) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \neq \emptyset$ d) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \neq \mathsf{U}$
e) $\mathsf{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ f) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset \Leftrightarrow \mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{U}$ g) $\mathsf{A} \subset \mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{B} = \mathsf{U}$
Potom vyslovte negace zapsaných výroků.

4. Napište záhlaví tabulky pro pravdivostní ohodnocení formulí X, Y, X', Y', $X \Rightarrow Y$, $Y' \Rightarrow X'$, $X \wedge Y'$, $Y \Rightarrow X$, $X' \Rightarrow Y'$, $X' \vee Y$, $X \vee Y'$ a tabulku vyplňte. Vyhledejte ty sloupce tabulky, které vyjadřují stejná ohodnocení, resp. právě opačná ohodnocení formulí. Vyslovte logické zákony, které jsou tím ověřeny.

5. Použijte ty sloupce tabulky vyplněné v úloze 4, které potřebujete k rozhodnutí o správnosti daných úsudků:
a) $\dfrac{X \Rightarrow Y \quad X}{Y}$ b) $\dfrac{X \Rightarrow Y \quad Y'}{X'}$ c) $\dfrac{X \Rightarrow Y \quad Y}{X}$ d) $\dfrac{X \Rightarrow Y \quad X'}{Y'}$

***6.** Úvahu v příkladu 3 absolvujte v případě, že posuzujeme jen složená čísla (a ne všechna přirozená čísla). Nezapomeňte na množinové vyjádření úvahy o hypotézách.

7. Použijte množinová vyjádření a grafická znázornění daných úsudků, které umožňují rozhodnout o jejich správnosti:

a) $\dfrac{\forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow B(x) \quad \forall x \in \mathsf{U}\colon B(x) \Rightarrow C(x)}{\forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow C(x)}$

b) $\dfrac{\forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow B(x) \quad \forall x \in \mathsf{U}\colon A(x)}{\forall x \in \mathsf{U}\colon B(x)}$

c) $\dfrac{\forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow B(x) \quad \exists x \in \mathsf{U}\colon B'(x)}{\exists x \in \mathsf{U}\colon A'(x)}$

d) $\dfrac{\forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow B(x) \quad \forall x \in \mathsf{U}\colon B'(x)}{\forall x \in \mathsf{U}\colon A'(x)}$

2.2 Přímé důkazy a jejich konstrukce

Na str. 45 si můžeme přečíst, jak výroková logika charakterizuje důkaz a jeho konstrukci pomocí pravidel dosazování a odloučení. Pravidlo odloučení je ilustrováno dvěma případy (mody), které se nejčastěji uplatňují.

Ve vyučování matematice podáváme zjednodušené charakteristiky důkazů, využíváme představu o řetězci (na sebe navazujících) implikací zapisovaném
$B_1 \Rightarrow B_2$, $B_2 \Rightarrow B_3$, ..., $B_{k-1} \Rightarrow B_k$, stručně také $B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_k$.
Toto jednoduché schéma užíváme i v situacích, kdy „ve hře" jsou výroky s kvantifikátory a kdy struktura úsudků je daleko složitější. Uvědomme si, že kromě průhledného úsudku I běžně pracujeme (například při řešení rovnic postupnými úpravami) s úsudkem II:

I $\dfrac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$ II $\dfrac{\forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow B(x) \quad \forall x \in \mathsf{U}\colon B(x) \Rightarrow C(x)}{\forall x \in \mathsf{U}\colon A(x) \Rightarrow C(x)}$

V této učebnici se seznámíme se schématy důkazů poněkud hlouběji v přehledných tabulkách, zatímco v řešených příkladech jen v didakticky únosné míře.

Na str. 44 jsou zapsána schémata přímých důkazů dvou typů výroků, které jsou v matematice nejčastější. Při jejich srovnání si snadno uvědomíme tyto skutečnosti:
— Nalézt přímý důkaz znamená sestrojit řetězec implikací.
— Důkazy těch výroků, které už samy implikaci obsahují, se jeví jako snazší, protože hledaný řetězec má daný začátek a konec. (Tato okolnost však může být i „svazující", a tedy nevýhodná.)
— Důkazy výroků, které mají neznámý začátek řetězce, proto vyžadují určitou fázi, ve které nějaký možný začátek řetězce hledáme a najdeme. Tuto fázi nazveme *rozbor* a budeme hovořit *o přímém důkazu na základě rozboru.*