Seminární práce z Metod řešení úloh II

Seminární práce se sestává ze dvou částí. Celkově je třeba získat alespoň 6 bodů, z toho nejméně 3 z první části.

Část 1

1. Dokažte tzv. aritmeticko-geometrickou (A-G) nerovnost:

$$\forall a_1, \ldots, a_n \geq 0 : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

   (1 bod, originální důkaz až 4 body).

2. Mějme následující neúplnou větu.

   Věta 1.

$$\forall a_1, \ldots, a_n \geq 0 : \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^k \geq ?$$

   Nalezněte maximální hodnotu (v závislosti na k a n), kterou lze doplnit za ? v obecném nebo následujících speciálních případech a

   (a) dokažte pro $n \in \mathbb{N}$, $k = 2^m$, $m \in \mathbb{N}_0$. (1 bod)

   (b) dokažte pro $n = 2$, $k \in \mathbb{N}$. (1 bod)

   (c) dokažte pro $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$. (2 body)

   (d) dokažte pro $n = 3$, $k = 3$. (3 body)

   (e) dokažte pro $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. (4 body)

   (f) zobecněte vzhledem k hodnotě $\sum_{i=1}^{n} a_i$ a/nebo oboru platnosti a dokažte pro $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. (5-6 bodů)

   Pozn. Zvažte užití A-G nerovnosti a následující, tzv. Bernoulliho nerovnosti:

$$\forall x \geq -2 \; \forall n \in \mathbb{N}_0 : (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

   Dále zvažte využití znalosti hodnot, pro které ve Větě 1 nastává rovnost.

Všechny důkazy musí být elementární, mohou tedy využívat pouze axiomů nebo již dokázaných tvrzení. Nelze používat např. výsledky diferenciálního počtu nebo jiné nerovnosti či vlastnosti matematických objektů (např. konkávnost funkcí) bez důkazu. Je-li některé z dokázaných tvrzení speciálním případem jiného, počítají se pouze body za obecnější tvrzení (např. v příkladu 2 jsou tvrzení (a)–(d) speciálními případy (e)).

Část 2

Z učebnice Metody řešení matematických úloh vypracujte neřešené úlohy na přímý důkaz, nepřímý důkaz, důkaz sporem a důkaz matematickou indukcí. K získaní n bodů je třeba vypracovat n úloh z každé skupiny, a to tak, aby žádné dvě úlohy jednoho typu nebyly podobné (je však možno např. jedno tvrzení dokázat dvěma způsoby).