

Číselné řady

Úvod

U řad budeme řešit dva typy úloh: nalezení součtu a konvergenci. Nalezení součtu (v případě, že řada konverguje) je obecně mnohem těžší, elementárně lze sečíst pouze několik málo typů řad. Součet konvergentní řady závisí na všech nenulových členech, proto v příkladech uvádíme „meze sumy“, tedy od kterého n_0 do ∞ členy řady sčítáme. Oproti tomu konvergence řady na konečném počtu členů nezávisí, proto neuvádíme spodní mez (protože může být libovolná) ani horní mez (protože je vždy ∞). Pro úvahy o konvergenci je z popsaného důvodu velmi užitečný pojem platnosti *pro skoro všechna n* , zkráceně pro s.v. n , jehož definici si pro jistotu připomeneme:

Definice. Řekneme, že vlastnost (predikát) $P(n)$ platí pro pro skoro všechna n , pokud existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$ (neboli vlastnost splňují všechna přirozená čísla od nějakého n_0). Řekneme, že vlastnost $Q(x)$ splňují skoro všechny členy posloupnosti a_n , pokud vlastnost $P(n) = Q(a_n)$ platí pro skoro všechna n (neboli vlastnost Q splňují všechny členy posloupnosti od nějakého členu dále).

Můžeme tedy například říci, že nerovnost $n^2 > 13$ je splněna pro skoro všechna n , protože platí pro všechna $n \geq n_0 = 4$, nebo ekvivalentně, že skoro všechny členy posloupnosti $a_n = n^2$ jsou větší než 13.

Věnujme se nyní elementárním úpravám řad. Důležitou úpravou je *přechíslování*. Například řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ a } \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m-1}$$

jsou totožné, což lze lehce ověřit rozepsáním sumy:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{4-1} + \dots$$

Korektně lze ověření provést pomocí substituce $n = m - 1$. Skutečně, nahradíme-li všechna n (včetně meze) v řadě vlevo $m - 1$, dostaneme řadu vpravo. Pomocí substituce tedy řady můžeme přechíslovat, musíme si však uvědomit její omezení: aby přechíslovaná řada obsahovala právě ty členy, které obsahovala řada původní, musí být vztah mezi množinami indexů n a m bijekcí (vzájemně jednoznačným zobrazením), a to rostoucí, aby nedošlo k přerovnání členů řady. To však znamená, že substituce může být obecně pouze posunutím v rámci celých čísel, a bude tedy vždy ve tvaru $n = m + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Výsledkem je totožná řada, pouze odlišně indexovaná:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{m=n_0-k}^{\infty} a_{m+k}.$$

Totéž přechíslování můžeme popsat i zmíněnou bijekcí, která nám na rozdíl od substituce umožní použít stejnou proměnnou. Můžeme tedy říci, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1},$$

protože řada vlevo vznikne z řady vpravo zobrazením indexů $n \mapsto n - 1$, což prakticky znamená, že řadu vpravo vytvoříme nahrazením všech n v řadě vlevo $n - 1$.

Jiným důležitým případem je rozdělení řady na dvě (nebo více). Uvažujme např. řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((1 + (-1)^n)n^2 + (1 - (-1)^n)2^n).$$

Výraz $1 + (-1)^n$ nabývá pro sudá n hodnoty 2 a pro lichá 0, výraz $1 - (-1)^n$ obráceně. Pro sudá n tedy budou členy řady rovny $2n^2$, pro lichá 2^{n+1} . Nabízí se tedy možnost zjednodušit řadu (resp. práci s ní) rozdělením na dvě, jednu se sudými a jednu s lichými členy. To lze podle věty o linearitě řad tehdy, když bude mít výsledný součet řad smysl, což v tomto případě jistě platí – obě řady mají nezáporné členy, tím pádem i nezáporné součty a jejich součet tedy smysl má.

Při rozkladu řady na dvě je nutné je přecíslovat. Kupříkladu hodnoty $2n^2$ budou členy řady nabývat jen pro sudá n , avšak řada v klasickém zápisu je vždy indexována všemi celými čísly počínaje nějakým n_0 . Je tedy třeba nalézt bijekci nějaké množiny $I_k = \{k + n; n \in \mathbb{N}_0\} = \{k, k + 1, k + 2, \dots\}$, $k \in \mathbb{Z}$ na množinu sudých přirozených čísel. V našem případě je řešení jednoduché: zobrazení $n \mapsto 2n$ splňuje všechny požadované vlastnosti, jeho proměnnou tedy můžeme použít k indexaci a hodnoty dosadit do členů řady. V případě lichých členů můžeme použít zobrazení $n \mapsto 2n + 1$ (pak bude řada indexována od $n = 0$, aby první hodnota byla 1), nebo $n \mapsto 2n - 1$ (indexováno od $n = 1$). Zvolíme např. druhou možnost a můžeme psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((1 + (-1)^n)n^2 + (1 - (-1)^n)2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(2n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(2n-1)+1} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} 4^n,$$

což je hledaný rozklad.

Příklad A. Zjednodušte řadu

$$(A.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}.$$

Řešení. „Zjednodušení“ řady (jako kteréhokoli jiného matematického výrazu) je nedefinovaným, intuitivním pojmem. Zpravidla se jím rozumí převedení na takový ekvivalentní tvar, který je vhodný pro řešení navazující úlohy určitého typu (např. dosazení, zjištění konvergence, derivace, integrace...). V případě řad bývají často obtížnými členy, jichž se úpravou pokud možno chceme zbavit, goniometrické posloupnosti. Nabývají-li hodnot vyjádřitelných pomocí elementárních funkcí, je to často možné. V našem případě se jedná o posloupnost $\sin \frac{n\pi}{2}$, která nabývá periodicky hodnot 1, 0, -1, 0. Vidíme ihned, že všechny sudé členy řady (A.1) jsou nulové. Stejně jako v předchozím výkladu řadu rozdělíme pomocí bijekcí $n \mapsto 2n$ a $n \mapsto 2n - 1$ na dvě:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi}{2}}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi}{2}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (n\pi - \frac{\pi}{2})}{2n-1}$$

Jak víme, pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je $\sin k\pi = 0$, všechny členy první řady i její součet jsou tedy nulové. Členy posloupnosti $\sin (n\pi - \frac{\pi}{2})$ mají hodnoty střídavě 1 a -1, posloupnost je tedy shodná s posloupností $(-1)^{n-1}$. Výsledek je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Příklad B. Nalezněte součet řady

$$(B.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

v závislosti na s , kde

$$(B.2) \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Řešení. Členy řady (B.1) jsou zřejmě lichými členy řady (B.2). Zkusme tedy podle předchozího rozložit řadu (B.2) na součet řad sudých a lichých členů (opět je to umožněno nezáporností členů řady):

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Řadu sudých členů můžeme jednoduše upravit a vyjádřit její součet pomocí s :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}s$$

Po dosazení do předchozího dostáváme

$$s = \frac{s}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

a odtud hledaný výsledek:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}s$$

Poznamenejme, že úloha nalézt hodnotu s byla ve své době velmi slavným, tzv. Basilejským problémem, o jehož řešení se na přelomu 17. a 18. století neúspěšně pokoušela celá špička tehdejší matematiky. Až roku 1735 ukázal švýcarský matematik Leonhard Euler, že

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Příklad C. Nalezněte součet řady

$$(C.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}.$$

Použijte vztah

$$(C.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Řešení. Vztah (C.2) známe už z kapitoly limity posloupností, byť v trochu jiném tvaru:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

Použijeme-li terminologie teorie řad, můžeme říci, že členy posloupnosti vpravo jsou částečnými součty řady (C.2) a jejich limita je tedy jejím součtem.

Abychom našli součet řady (C.1), rozdělíme ji opět na dvě, tentokrát ovšem odlišným způsobem – nebudeme vytvářet „vybrané“ řady (jako bylo předchozí dělení na sudé a liché členy), ale rozdělíme přímo n -tý člen řady na dva:

$$\frac{n+1}{n!} = \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!}$$

Smysl takového rozdělení je pochopitelně v tom, že první ze vzniklých zlomků můžeme krátit n a tak zjednodušit. Zde ovšem pozor – krácení zde umožňuje rovnost $n! = n \cdot (n-1)!$, která platí pro $n \in \mathbb{N}$, ale nikoli pro $n = 0$ (pokud si tento fakt neuvědomíme, mělo by nás přinejmenším napadnout, že nulou nelze krátit). Tento případ musíme také uvažovat, protože řada (C.1) je indexována právě od nuly. V takovém případě je obecně třeba členy, které se chovají jinak než ostatní, oddělit.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \frac{0}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

Protože řadu, která má ve jmenovateli $(n-1)!$, neumíme přímo sečíst, přecházíme ji použitím zpětné bijekce $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Nyní je už řešení triviální:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$$

PŘÍKLADY

1. Zjednodušte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(-1)^{n^4} \cos \frac{n\pi}{2}$.
2. Nalezněte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ v závislosti na $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. Nalezněte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Sčítání řad

Příklad D. Nalezněte součet řady

$$(D.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{5 \cdot 2^{2n-1}}$$

Řešení. Řada je geometrická s kvocientem $q = -\frac{3}{4}$. To lze zjistit z definice geometrické posloupnosti:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1} 3^{(n+1)+1}}{5 \cdot 2^{2(n+1)-1}} = -\frac{3}{4}$$

Protože je podíl $n + 1$ -ního a n -tého členu řady konstantní (nezávisí na n), jde o geometrickou řadu s kvocientem rovným tomuto podílu. Vyčíslení složeného zlomku nahoře je však zbytečně pracné – jednodušší je použít tvrzení, které říká, že je-li n -tý člen posloupnosti součinem (resp. podílem) konstant a členů tvaru q^{an+b} , je posloupnost geometrická s kvocientem rovným součinu (podílu) výrazů q^a . V tomto případě členy řady podmínku evidentně splňují a

$$q = \frac{(-1)^1 3^1}{2^2} = -\frac{3}{4}.$$

Protože je $-1 < q < 1$, řada konverguje a podle vzorce pro součet geometrické posloupnosti je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{5 \cdot 2^{2n-1}} = \frac{(-1)^0 3^{0+1}}{5 \cdot 2^{2 \cdot 0 - 1}} = \frac{24}{1 - (-\frac{3}{4})} = \frac{24}{35}$$

Příklad E. Nalezněte součet řady

$$(E.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$$

Řešení. Upravíme členy řady:

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Poslední úprava se nazývá *rozklad na parciální zlomky* a jako technika hraje důležitou roli např. v integrálním počtu při integraci racionálních funkcí. V tomto případě nám umožní vyjádřit částečné součty řady (E.1). Je totiž

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2 + n} &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Řadám tohoto typu se někdy říká *teleskopické*, protože odečtení stejných členů umožní „složit“ částečný součet řady stejně, jako teleskopický dalekohled. Známe-li vyjádření částečných součtů pomocí elementárních funkcí, je už určení součtu řady jednoduché, neboť je definován jako jejich limita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

Konvergence řad

Příklad F. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(F.1) \quad \sum \frac{n^2}{(n+3)(2n-1)}.$$

Řešení. Protože číselník a jmenovatel členů řady jsou polynomy stejného stupně, bude limita členů řady nenulová:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+3)(2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2(1 + \frac{3}{n})(2 - \frac{1}{n})} = \frac{1}{2} \neq 0$$

a podle nutné podmínky konvergence řada diverguje.

Příklad G. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(G.1) \quad \sum \sin n.$$

Řešení. V tomto případě limita členů řady neexistuje. To je však silnější tvrzení, než potřebujeme – podle nutné podmínky konvergence k divergenci řady stačí, aby se limita členů řady nerovnila nule. To dokážeme jednoduše: v každém intervalu $(2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6})$, kde funkce sinus nabývá hodnot větších než $\frac{1}{2}$, leží alespoň jedno celé číslo, protože délka tohoto intervalu je $\frac{2\pi}{3} > 2$ (takže v něm dokonce leží alespoň dvě celá čísla). To znamená, že nekonečně mnoho členů posloupnosti $\sin n$ má hodnotu větší než $\frac{1}{2}$, což podle definice limity znamená, že limita jistě není nula, protože neexistuje takový člen posloupnosti, od něž dál už se všechny členy posloupnosti liší od nuly o méně než $\frac{1}{2}$ (také lze říci, členy s hodnotou větší než $\frac{1}{2}$ tvoří vybranou posloupnost, jejíž limita nemůže být nula). Řada tedy diverguje. Poznamenejme, že pokud bychom chtěli dokázat neexistenci limity posloupnosti $\sin n$, museli bychom stejným způsobem jako výše uvažovat ještě např. intervaly, v nichž je funkce sinus záporná. Protože je nekonečně mnoho členů větších než $\frac{1}{2}$ a nekonečně mnoho záporných, není splněna Bolzano-Cauchyho podmínka a protože je posloupnost omezená, nemá limitu (opět lze i pomocí dvou vybraných posloupností).

Příklad H. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(H.1) \quad \sum \frac{n!^2}{(2n)!}.$$

Řešení. Na řady se členy ve tvaru součinu nebo podílu faktoriálů se většinou (byť ne vždy) osvědčuje podílové kritérium, a to v jeho jednodušší, limitní podobě.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!}}{\frac{n!^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

Řada tedy konverguje a protože jsou její členy nezáporné, konverguje i absolutně.

Příklad I. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(I.1) \quad \sum \frac{1}{3^{n+1} + (-3)^n}.$$

Řešení. Tato řada je jednou z mála, u nichž má smysl použití nelimitního podílového kritéria. Zpravidla totiž na řady, na které toto kritérium lze aplikovat, lze buď použít jednodušší limitní verzi, nebo je jednodušší použít jiné kritérium (typicky srovnávací, jak tomu je i v tomto případě). Spočteme podíl po sobě následujících členů řady:

$$\frac{\frac{1}{3^{n+2} + (-3)^{n+1}}}{\frac{1}{3^{n+1} + (-3)^n}} = \frac{3^{n+1} + (-3)^n}{3^{n+2} + (-3)^{n+1}} = \frac{3^n(3 + (-1)^n)}{3^{n+1}(3 + (-1)^{n+1})} = \frac{3 + (-1)^n}{3(3 - (-1)^n)}$$

Pro sudá n tedy bude hodnota podílu $\frac{2}{3}$, pro lichá $\frac{1}{6}$. Existuje tedy $q = \frac{2}{3} < 1$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, a řada konverguje. Protože má nezáporné členy, konverguje i absolutně.

Ukažme si ještě jiný postup. Jak bylo předesláno, lze v tomto případě použít srovnávací kritérium. Protože je $(-3)^n \geq -3^n$, je

$$0 \leq \frac{1}{3^{n+1} + (-3)^n} \leq \frac{1}{3^{n+1} - 3^n} = \frac{1}{2 \cdot 3^n},$$

a protože řada $\sum \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ je geometrická s kvocientem $\frac{1}{3}$ a tedy konvergentní, konverguje i řada původní.

Příklad J. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(J.1) \quad \sum \left(\frac{2n-1}{n+2} \right)^{1-3n}.$$

Řešení. Odmocninové kritérium se zpravidla neúčívá tak často jako kritérium podílové. Důvodem je technická obtížnost limit výrazů $\sqrt[n]{a_n}$. Přesto má svoji nezastupitelnou úlohu právě u řad se členy ve tvaru mocniny, kde exponent je polynom (či obecněji racionální posloupnost) proměnné n . n -tá odmocnina znamená dělení exponentu n , což je vhodné, pokud je exponent přímo násobkem n . V příkladech, jako je tento, je třeba se se nejprve v exponentu zbavit sčítanců, jež nejsou násobky n , a to pomocí srovnávacího kritéria. Pokud je to možné, u obou kritérií používáme jednodušší, limitní verzi. Řadu (J.1) (označme její členy a_n) srovnáme s řadou $\sum b_n$, kde

$$b_n = \left(\frac{2n-1}{n+2} \right)^{-3n},$$

na níž už bude možno aplikovat odmocninové kritérium. Máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n-1}{n+2} \right)^{1-3n}}{\left(\frac{2n-1}{n+2} \right)^{-3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+2} = 2 \in (0, \infty)$$

a konvergence obou řad je tedy ekvivalentní. A protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+2} \right)^{-3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{n+2} \right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8} < 1,$$

konvergují obě řady absolutně. Poznamenejme, že případy, ve kterých je poslední limita rovna jedné, nelze rozhodnout odmocninovým kritériem, zpravidla však postačí použít nutnou podmínku konvergence.

Příklad K. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(K.1) \quad \sum \sin^n n \cos^n n.$$

Řešení. První, čeho bychom si měli povšimnout, je, že se v tomto případě nejedná o řadu s nezápornými členy. Členy této řady mění znaménko, nelze tedy použít kritéria určená pro řady s nezápornými členy, zároveň není jasné, jak rozložit členy na součin, aby bylo možno použít Abelova či Dirichletova kritéria (protože součin neobsahuje monotónní posloupnost, museli bychom ji „dodat“ rozšířením, to by však zkomplikovalo zbytek). Příklady tohoto typu jsou obecně velmi obtížné, jednoduše je lze řešit prakticky jen tehdy, když lze k důkazu divergence použít nutnou podmínku konvergence (která na znaménku členů nezávisí) nebo k důkazu konvergence konvergenci absolutní. Touto cestou se vydáme i zde. Budeme zkoumat konvergenci řady

$$\sum |\sin^n n \cos^n n| = \sum |\sin n \cos n|^n$$

pomocí odmocninového kritéria (k němuž nás vede tvar členů řady jako n -tých mocnin). Hned však vidíme, že výraz $|\sin n \cos n|$, který nám vznikne, patrně nemá limitu, a nebude tedy možno použít limitní verze kritéria. Pokud by se nám však podařilo dokázat, že je tento výraz shora omezený konstantou menší než 1, řada by konvergovala podle nelimitní verze kritéria. To se nám malou úpravou skutečně podaří:

$$\sqrt[n]{|\sin n \cos n|^n} = |\sin n \cos n| = \frac{|\sin 2n|}{2} \leq \frac{1}{2}$$

a řada tedy absolutně konverguje.

Příklad L. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(L.1) \quad \sum \frac{1}{n^2}.$$

Řešení. Na první pohled je zřejmé, že řada splňuje nutnou podmínku konvergence. Zároveň nemá smysl použít podílové či odmocninové kritérium, protože řada neobsahuje žádný člen rostoucí alespoň tak rychle, jako geometrická posloupnost (a limity z podílového i odmocninového kritéria tedy budou rovny jedné). Jde tedy o typický příklad použití kritéria srovnávacího. To je obecně nejsilnější z kritérií pro řady s nezápornými členy, dokážeme-li ovšem najít vhodnou řadu ke srovnání, jejíž konvergenci budeme znát. Naši řadě je podobná řada (E.1). Zkusme nejprve použít nelimitní verzi srovnávacího kritéria. Protože řada (E.1) konverguje, pokusíme se totéž dokázat pro zkoumanou řadu (L.1) – toto rozhodnutí je u nelimitní verze zásadní, protože nám říká, zda se máme vyšetřovanou řadu pokusit omezit shora (naš případ) nebo zdola (pokud dokazujeme divergenci). Pokus o přímé srovnání odpovídajících si členů nevyjde, je totiž

$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2 + n},$$

což je opak toho, co bychom potřebovali. To lze však lehce napravit – s n -tým členem řady (E.1) srovnáme $n + 1$ -ní člen řady (L.1):

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2 + n}$$

a odtud dostáváme konvergenci řady $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$, což je však řada $\sum \frac{1}{n^2}$ bez prvního členu. Konvergence řady však na konečném počtu členů nezáleží, proto vyšetřovaná řada absolutně konverguje.

Ještě jednodušeji můžeme výsledek dostat použitím limitního srovnávacího kritéria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2} = 1 \in (0, \infty),$$

tedy konvergence obou řad je ekvivalentní a protože řada (E.1) konverguje, konverguje i řada (L.1).

Tento důležitý příklad a divergence harmonické řady nám umožní rozhodovat o konvergenci řad

$$(*) \quad \sum \frac{1}{n^\alpha},$$

kde $\alpha \leq 1$ nebo $\alpha \geq 2$. Je totiž zřejmé, že pro $\alpha \leq 1$ je $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ a tedy řada (*) podle srovnávacího kritéria diverguje, zatímco pro $\alpha \geq 2$ je $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ a řada podle téhož kritéria konverguje. Tohoto faktu budeme od nynějška využívat, aniž bychom jej znova dokazovali. U řad (*) s $\alpha \in (1, 2)$ zůstává otázka konvergence pro nás otevřená; prozradíme, že pro všechna $\alpha > 1$ řada konverguje, což lze poněkud obtížně dokázat i elementárními prostředky (viz soubor "alpha-beta.pdf"), jednoduše (a dokonce v obecnější podobě) pak pomocí tzv. *integrálního kritéria*, které však vyžaduje zavedení integrálů a je pro nás v tuto chvíli nedostupné.

Předchozí odstavec má zásadní význam pro použití srovnávacího kritéria. Tam totiž musíme zkonstruovat řadu, s níž vyšetřovanou řadu srovnáme, a o níž již musíme vědět (nebo být schopni podle nějakého kritéria určit), zda konverguje. Nyní tedy máme k dispozici dva typy řad, jejichž konvergenci jsme schopni určit přímo – řady z předchozího odstavce a řady geometrické.

Příklad M. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(M.1) \quad \sum \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \ln(n^2 + n)}{n^2}.$$

Řešení. Ze stejného důvodu jako v předchozím příkladě nemá smysl použít podílové nebo odmocninové kritérium. Technikami známými z výpočtů limit upravíme členy zadané řady, abychom našli řadu, se kterou budeme srovnávat:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \right)} \\ \ln(n^2 + n) &= \ln \left(n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \ln n^2 + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 2 \ln n \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{2 \ln n} \right) \end{aligned}$$

Vyjádřili jsme tedy členy řady (M.1) (označme je a_n) ve tvaru

$$a_n = \frac{4 \ln n \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{2 \ln n} \right)}{n^2 \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \right)},$$

jehož smysl tkví v tom, že nahrazením závorek jejich konečnými nenulovými limitami 1 (čitatel) resp. 2 (jmenovatel) dostaneme podstatně zjednodušený výraz vhodný jako člen srovnávací řady $\sum b_n$:

$$b_n = \frac{2 \ln n}{n^2 \sqrt{n}}$$

Dokázat ekvivalenci konvergence obou řad je nyní triviální:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \ln n \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{2 \ln n} \right)}{\frac{2 \ln n}{n^2 \sqrt{n}}} = 1 \in (0, \infty)$$

Členy srovnávací řady $\sum b_n$ jsou již maximálně zjednodušené, konvergenci této řady však neznáme. Je třeba opět použít srovnávací kritérium (tentokrát v nelimitní verzi) a porovnat řadu s nějakou řadou, jejíž konvergenci již budeme znát. Zde se nabízí použití řady $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, nejprve nás patrně napadne $\alpha = \frac{5}{2}$. Tento pokus je však odsouzen k neúspěchu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \ln n}{n^2 \sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \ln n = \infty,$$

skoro všechny členy řady $\sum b_n$ jsou tedy větší než členy konvergentní řady $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$, z čehož pochopitelně plyne jediný závěr, a to, že toto srovnání je k ničemu (poznamenejme, že pokud by byl člen $\ln n$ ve jmenovateli, byla by nerovnost opačná a příklad by byl vyřešen). Obtížný logaritmus v čitateli však můžeme „neutralizovat“ libovolně malou mocninou n :

$$\frac{2 \ln n}{n^2 \sqrt{n}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2 \ln n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{pro s.v. } n,$$

protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln n}{\sqrt{n}} = 0,$$

což plyne ze vztahu $\ln^{k_1} n \ll n^{k_2}$ pro $k_1, k_2 > 0$. Členy řady b_n jsme tedy shora omezili členy konvergentní řady $\sum \frac{1}{n^2}$ (říkáme také, že tato řada je pro řadu b_n *konvergentní majorantou*), a tedy $\sum b_n$ i řada (M.1) absolutně konvergují.

Příklad N. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(N.1) \quad \sum \operatorname{tg} \frac{n^2}{2^n}.$$

Řešení. Příklady, ve kterých se vyskytuje transcendentní elementární funkce, jejímž argumentem je posloupnost jdoucí k nule (což zde plyne ze vztahu $n^k \ll q^n$ pro $k > 0, q > 1$), řešíme zpravidla na základě znalosti chování takové funkce v okolí nuly. V případě funkce $\operatorname{tg} x$ víme, že pro každé $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ platí $\operatorname{tg} x \geq x$, čímž máme odhad funkce zdola. Zároveň $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a protože např. pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$ je $\cos x \geq \frac{1}{2}$ (plyne to z toho, že funkce $\cos x$ je na tomto intervalu klesající a $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$) a $\sin x \leq x$, je na témž intervalu $\operatorname{tg} x \leq \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$ (nerovnost plyne z toho, že jsme „zvětšili čitatel“ a „zmenšili jmenovatel“), což je omezení $\operatorname{tg} x$ shora. Interval platnosti zde není omezením – konverguje-li posloupnost kladných čísel k nule, bude libovolný interval $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ obsahovat skoro všechny její členy. Řada $\sum \operatorname{tg} a_n$, kde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ tedy bude konvergovat právě tehdy, když bude konvergovat $\sum a_n$, protože její členy omezují $\operatorname{tg} a_n$ zdola a členy posloupnosti $\sum 2a_n$, jejíž konvergence je ekvivalentní, shora. Zjistíme tedy nejprve, zda konverguje argument a pak pomocí něj omezíme vyšetřovanou řadu shora nebo zdola. Řada $\sum \frac{n^2}{2^n}$ je typickou řadou vhodnou pro užití podílového kritéria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

a řada tedy konverguje. Podle předchozího odstavce tedy omezíme členy řady (N.1) shora:

$$\operatorname{tg} \frac{n^2}{2^n} \leq 2 \cdot \frac{n^2}{2^n} \quad \text{pro s.v. } n$$

a můžeme konstatovat, že řada (N.1) konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

Shrňme známé vlastnosti elementárních funkcí, které umožní jejich odhady v okolí nuly, resp. dalších důležitých bodů. Z předchozího odstavce máme pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$: $x \leq \operatorname{tg} x \leq 2x$. Tento odhad však můžeme použít jen tehdy, je-li vnitřní posloupnost nezáporná. Z lichosti všech tří funkcí v nerovnosti však snadno dostaneme analogický odhad pro x nekladná: je-li $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, 0 \rangle$, platí $-x \leq \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \leq -2x$, neboli $x \geq \operatorname{tg} x \geq 2x$. Odhady pro nezáporná a nekladná x můžeme shrnout do jednoho: pro $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \rangle$ je $|x| \leq |\operatorname{tg} x| \leq 2|x|$.

Poznamenejme, že horní odhad lze zlepšit (tedy snížit), protože omezíme-li se na kratší interval (což lze, protože konverguje-li vnitřní posloupnost k nule, stačí odhad na libovolně malém intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$), můžeme zvýšit minimální hodnotu $\cos x$ na tomto intervalu (např. pro $x \in \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \rangle$ platí $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ a tedy $|\operatorname{tg} x| \leq \frac{2|x|}{\sqrt{3}}$). Z předchozího odstavce je zřejmé, že v tomto případě by takové zlepšení nemělo smysl, v jiných příkladech (např. při použití nelimitního odmocninového kritéria) však ano. Další zlepšení umožňuje odhad funkce $\cos x$ nikoli konstantou, ale funkcí, což však překračuje rámec tohoto textu. Na rozdíl do horního odhadu uvedený spodní odhad zlepšit nelze (resp. ne multiplikativní konstantou) – pro žádné $\alpha > 1$ neplatí $\alpha|x| \leq |\operatorname{tg} x|$ na žádném intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, což plyne okamžitě z toho, že horní odhad můžeme zkracováním intervalu snížit na libovolně $\alpha|x|$, $\alpha > 1$ (protože $\cos x$ je v dostatečně malém intervalu kolem nuly větší než $\frac{1}{\alpha}$).

Věnujme se nyní odhadům dalších funkcí. Víme, že pro $x \in \langle 0, \infty \rangle$ je $\sin x \leq x$, máme tedy odhad funkce $\sin x$ shora. Zároveň pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ platí $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \geq x$, neboli $\sin x \geq x \cos x$. Stejně jako při odvození odhadu $\operatorname{tg} x$ se můžeme omezit na interval $\langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$, kde platí $\cos x \geq \frac{1}{2}$ a tedy pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$ máme $\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$. Stejně jako u $\operatorname{tg} x$ můžeme použít lichost pro odhad

v záporných x a dostaneme univerzální odhad: pro každé $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \rangle$ je $\frac{|x|}{2} \leq |\sin x| \leq |x|$. V tomto případě lze volbou užšího intervalu zlepšit dolní odhad, a to na $\alpha|x|$, kde $\alpha < 1$.

Odhady funkce $\cotg x$ můžeme velice snadno odvodit z již hotových odhadů pro $\tg x$. Pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ totiž platí $\cotg x = \frac{1}{\tg x}$, což spolu s odhady $\tg x$ dává pro $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, 0 \rangle \cup (0, \frac{\pi}{3})$ nerovnosti $\frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{|\tg x|} = |\cotg x| \geq \frac{1}{2|x|}$. Odhad zdola lze zlepšit na $\frac{1}{\alpha|x|}$ pro $\alpha > 1$. Pro $x = 0$ nemá odhad pochopitelně smysl, protože v tomto bodě není funkce $\cotg x$ definována.

Zbývající goniometrickou funkci, $\cos x$, lze pomocí racionálních funkcí odhadnout také, tyto odhady však (byť je lze snadno odvodit ze získaných odhadů pro $\sin x$), překračují rámec tohoto textu. Pro naše účely postačí odhad pomocí konstant: pro $x \in \mathbb{R}$ je $\cos x \leq 1$ a např. pro $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \rangle$ je $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

Překvapivě snadno lze pomocí již odvozených vztahů získat odhady „nepříjemných“ cyklometrických funkcí – stačí využít toho, že jsou definovány jako inverzní funkce ke goniometrickým funkcím zúženým na určitý interval. Například dosadíme-li do odhadu $|y| \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow |y| \leq |\tg y| \leq 2|y|$ za y výraz $\arctg x$, dostaneme $|\arctg x| \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow |\arctg x| \leq |\tg \arctg x| \leq 2|\arctg x|$. Protože $\tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ a $\arctg x$ je rostoucí, lichá a spojitá funkce, je podmínka $|\arctg x| \leq \frac{\pi}{3}$ ekvivalentní s $x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$. K funkci $\arctg x$ je (na celém \mathbb{R}) inverzní funkce $\tg x \upharpoonright (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, proto je $\tg \arctg x = x$. Po této úpravě můžeme dvojitou nerovnost $|\arctg x| \leq |x| \leq 2|\arctg x|$ rozepsat na dvě nerovnosti a pravou z nich dělit dvěma. Dostaneme výsledné odhady funkce $\arctg x$: pro každé $x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$ je $\frac{|x|}{2} \leq |\arctg x| \leq |x|$. Provedeme-li popsanou substituci ve zlepšeném horním odhadu funkce $\tg x$ (viz výše), dostaneme zlepšený dolní odhad $\arctg x$.

Naprostoto stejným postupem (který z tohoto důvodu ani neuvádíme) dostaneme odhady funkce $\arcsin x$: pro každé $x \in \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$ je $|x| \leq |\arcsin x| \leq 2|x|$ s možností zlepšení horního odhadu.

Funkce $\operatorname{arccotg} x$ je inverzní k $\cotg x$ v intervalu $(0, \pi)$, proto se předem omezíme na kladná x . Podmínka $0 < y \leq \frac{\pi}{3}$ (vzniklá konjunkcí podmínky z odhadů $\cotg x$ a podmínkou kladnosti z předchozí věty) po substituci $y = \operatorname{arccotg} x$ dá nerovnosti $0 < \operatorname{arccotg} x \leq \frac{\pi}{3}$, z nichž levá je splněna vždy, pravá pro $x = \cotg \operatorname{arccotg} x \geq \cotg \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Změna nerovnosti je samozřejmě důsledkem toho, že funkce $\cotg x$ je na intervalu $(0, \pi)$ klesající. Interval platnosti odhadů pro $\operatorname{arccotg} x$ má tedy zásadně odlišný charakter, než je tomu v ostatních případech. Odvození samotných odhadujících nerovností je opět velice podobné předchozím a přenecháváme jej čtenáři jako cvičení. Výsledek: pro všechna $x \in \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty \rangle$ je $\frac{1}{x} \geq \operatorname{arccotg} x \geq \frac{1}{2x}$ s možností zlepšení dolního odhadu.

Posledními dvěma funkcemi, jejichž chování v okolí významných bodů je třeba znát, je e^x a $\ln x$. V prvním případě vyjdeme z nerovnosti $1+x \leq e^x$, která platí na celém \mathbb{R} (algebraicky říká, že graf funkce e^x je všude „nad“ grafem jeho tečny v bodě 0) a je horním odhadem. Dosazením $-x$ za x z ní, opět v celém \mathbb{R} , dostaneme $1-x \leq e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ a odtud pro $1-x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$ (aby se při dělení nerovnosti $1-x$ nezměnila nerovnost) horní odhad $e^x \leq \frac{1}{1-x}$. Vzhledem k rozdílnosti intervalu pro horní a dolní odhad je v tomto případě neuvádíme v jedné nerovnosti, i když tato nerovnost pro $x \in (-\infty, 1)$ samozřejmě platí.

Funkce $\ln x$ je inverzní k e^x na celém \mathbb{R} , proto můžeme opět dostat její odhady substitucí $y = \ln x$ v odhadech funkce e^y . V případě horního odhadu dostaneme pro $x \in \mathbb{R}^+$ nerovnost $1 + \ln x \leq e^{\ln x} = x$, neboli $\ln x \leq x - 1$, což je dolní odhad $\ln x$. Poznamenejme, že ačkoli platí pro všechna kladná x , je podstatný hlavně v okolí bodu 1, často se také uvádí ve tvaru $\forall x \in (-1, \infty) : \ln(1+x) \leq x$, což je odhad v okolí nuly. Z mezitvaru dolního odhadu funkce e^y máme pro $x \in \mathbb{R}^+$ mezitvar horního odhadu $\ln x$: $1 - \ln x \leq e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$, který snadno převedeme na výsledný $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$. Výhoda použití mezitvaru tkví nejen ve snazší algebraické úpravě, ale hlavně v širším oboru platnosti. Pokud bychom odvozovali z výsledného odhadu e^y , dostali bychom odhad jen pro $x \in (0, e)$ (rozmyslete si). Odhad se opět používá i

ve tvaru pro okolí nuly $\forall x \in (-1, \infty) : 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$. V případě logaritmu jsou intervaly odhadů stejné, můžeme je tedy sjednotit do $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, resp. $\forall x \in (-1, \infty) : \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$. Odhady e^x a $\ln x$ nelze zlepšit multiplikační konstantou.

Zapamatovat si výše uvedené odhady v algebraické podobě je značně obtížné. Nejjednodušší je patrně grafická představa: dokážeme-li si představit grafy funkcí $\frac{x}{2}$, x a $2x$ a funkce $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$ sevřené mezi prvními, resp. druhými dvěma funkcemi, a víme-li, že v nějakém okolí nuly (bez nuly samotné) platí $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ a že grafy funkcí k sobě inverzních jsou symetrické podle osy prvního a třetího kvadrantu (tedy podle přímky $y = x$), lze odhady goniometrických a cyklometrických funkcí velmi rychle odvodit. Oproti tomu u exponenciály a logaritmu je už obtížnější přesná představa omezujících racionálních funkcí, zatímco algebraické odvození je jednoduché, proto je patrně nejefektivnější graficky si pamatovat odhady přímkou (e^x zdola a $\ln x$ shora) a ostatní odvodit popsáním způsobem.

Ukažme si nyní použití odvozených odhadů na dalších příkladech.

Příklad O. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(O.1) \quad \sum \frac{1}{n \operatorname{arccotg}^2 \sqrt{n}}.$$

Řešení. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ spadají hodnoty \sqrt{n} do intervalu $\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty \rangle$, pro který známe odhad funkce $\operatorname{arccotg} x$ (stačilo by ovšem, aby tam spadaly pro s.v. n). Protože nevíme, zda budeme potřebovat horní či dolní odhad, použijeme univerzální tvar s oběma odhady. Je tedy $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \operatorname{arccotg} \sqrt{n} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, z čehož umocněním na druhou (což je zde korektní, protože všechny strany jsou nezáporné) a vynásobením n dostáváme $1 \geq n \operatorname{arccotg}^2 \sqrt{n} \geq \frac{1}{4}$. Máme tedy odhad jmenovatele, převrácením získáme odhad členů řady:

$$1 \leq \frac{1}{n \operatorname{arccotg}^2 \sqrt{n}} \leq 4$$

a vidíme, že potřebujeme pouze odhad zdola (který ovšem vznikl převrácením odhadu $\operatorname{arccotg} \sqrt{n}$ shora), protože řada $\sum 1$ je na první pohled divergentní (její součet je zřejmě ∞ , také nesplňuje nutnou podmínku konvergence řady), a tedy podle srovnávacího kritéria diverguje i řada (O.1).

Příklad P. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(P.1) \quad \sum \left(n \arcsin \frac{1}{2n} \right)^n.$$

Řešení. Členy této řady jsou nezáporné a jejich tvar vybízí k použití odmocninového kritéria, avšak v nelimitní verzi, protože spočítat limitu výrazu

$$\sqrt[n]{\left(n \arcsin \frac{1}{2n} \right)^n} = n \arcsin \frac{1}{2n}$$

je značně obtížné. Právě pro tyto případy však jsou určeny odhady. Posloupnost $\frac{1}{2n}$ má limitu 0 a skoro všechny její členy budou v libovolném intervalu, jehož je 0 vnitřním bodem. Můžeme tedy předpokládat, že $\frac{1}{2n} \in \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$ a že tudíž

$$\frac{1}{2n} \leq \arcsin \frac{1}{2n} \leq 2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

(absolutní hodnoty vynecháváme, protože všechny výrazy jsou kladné), z čehož po vynásobení n máme

$$\frac{1}{2} \leq n \arcsin \frac{1}{2n} \leq 1.$$

Tento odhad však nestačí – abychom mohli říci, že řada podle odmocninového kritéria konverguje, museli bychom dokázat, že její členy jsou menší nebo rovny nějakému $q < 1$. Horní odhad $\arcsin x$ lze ovšem zlepšit, a to tak, že zlepšíme odhad $\sin x$ zdola a pomocí substituce přejdeme k inverzní funkci (viz postup výše).

Pro $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $|\sin y| \geq |y| \cos y$, stačí tedy odhadnout $\cos y$ zdola větší konstantou než $\frac{1}{2}$, která byla použita v odhadu, který jsme zkoušeli výše. To lze snadno: např. pro $y \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle$ je $\cos y \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy $|\sin y| \geq \frac{|y|}{\sqrt{2}}$. Substitucí $y = \arcsin x$ dostáváme pro $x \in \langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$ odhad $|x| \geq \frac{|\arcsin x|}{\sqrt{2}}$, neboli $|\arcsin x| \leq \sqrt{2}|x|$.

Zopakujeme předchozí postup s novým odhadem (tentokrát už jen shora):

$$\arcsin \frac{1}{2n} \leq \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}n}$$

a po vynásobení n dostáváme

$$n \arcsin \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

čímž jsme podle odmocninového kritéria dokázali, že řada absolutně konverguje.

Příklad Q. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(Q.1) \quad \sum \frac{(-1)^n n}{n^2 + 2}.$$

Řešení. Jde o typickou alternující řadu (tedy řadu se střídavými znaménky). Speciálně pro tyto řady je určeno Leibnizovo kritérium, které má ovšem nevýhodu: lze pomocí něj zjistit jen neabsolutní konvergenci, divergenci a absolutní konvergenci nikoli. Doporučený postup pro alternující řady je tedy následující: nejprve zkusíme nutnou podmínku konvergence, pokud je splněna, zkoumáme absolutní konvergenci (v případě, že vidíme, že řada absolutně konverguje, můžeme nutnou podmínku přeskočit) a pouze v případě, že řada nekonverguje absolutně, zkusíme ověřit předpoklady Leibnizova kritéria. Protože jeden je shodný s nutnou podmínkou konvergence a byl již ověřen, dokážeme pouze, že posloupnost absolutních hodnot členů řady je (alespoň od nějakého členu dále) nerostoucí. To provedeme z definice – posloupnost (a_n) je nerostoucí od n_0 -tého členu, pokud pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_{n+1} \leq a_n$.

Proveďme nyní doporučený postup pro řadu (Q.1). Označme členy řady (Q.1) a_n . Nutná podmínka konvergence je splněna, protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 2} = 0.$$

Zkusme tedy absolutní konvergenci. Řada $\sum |a_n|$ splňuje nutnou podmínku konvergence, zároveň však neobsahuje žádný člen rostoucí alespoň jako geometrická posloupnost, proto nemá smysl použití podílového a odmocninového kritéria. Použijeme kritérium srovnávací – (limitně) největší členy v čitateli a jmenovateli budou tvořit číselník a jmenovatel členů srovnávací řady:

$$b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

a protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+2} = 1 \in (0, \infty),$$

a harmonická řada $\sum b_n$ diverguje ($\alpha = 1$, viz výše), diverguje i řada $\sum |a_n|$ a tedy řada (Q.1) nekonverguje absolutně.

Zkusme tedy aplikovat Leibnizovo kritérium. Zjistíme, zda je posloupnost $(|a_n|)$ nerostoucí. Znamená to řešit nerovnost

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{(n+1)^2+2} &\leq \frac{n}{n^2+2} \\ (n+1)(n^2+2) &\leq n(n^2+2n+3) \\ n^3+n^2+2n+2 &\leq n^3+2n^2+3n \\ 2 &\leq n^2+n\end{aligned}$$

Přesné řešení (tj. nalezení všech n , která takovou nerovnost splňují) by vyžadovalo řešení kvadratické nerovnice, to je však v tomto případě zbytečně složité. Stačí vědět, že výsledná nerovnost (kterou jsme dostali ekvivalentními úpravami nerovnosti původní), je splněna pro s.v. n . To je však snadné – už pro $n = 1$ je nerovnost splněna a pravá strana je jako součet rostoucích posloupností rostoucí, tedy pro všechna $n > 1$ bude nerovnost splněna také. Obecněji lze argumentovat tak, že posloupnost vpravo má limitu ∞ , skoro všechny její členy tedy musí být větší než 2. Tím jsme ověřili druhou podmínku Leibnizova kritéria a můžeme říci, že řada (Q.1) neabsolutně konverguje.

Příklad R. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$(R.1) \quad \sum \cos(n\pi) \ln \frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

Řešení. Řada je alternující, protože $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a druhý člen nemění znaménko: pro každé $n > 1$ je $0 < \frac{n^2-1}{n^2+1} < 1$ a tedy $\ln \frac{n^2-1}{n^2+1} < 0$. Označme členy řady (R.1) a_n a protože od nynějška budeme pracovat už jen s jejich absolutními hodnotami (v nutné podmínce, případně absolutní konvergenci a Leibnizově kritériu), poněkud je zjednodušíme:

$$|a_n| = \left| (-1)^n \ln \frac{n^2-1}{n^2+1} \right| = -\ln \frac{n^2-1}{n^2+1} = \ln \frac{n^2+1}{n^2-1}$$

Nutná podmínka konvergence je splněna:

$$(R.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2-1} = 0,$$

což plyne ze spojitosti funkce $\ln x$ v bodě 1 nebo také z odhadu $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ – protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = 1$, jsou skoro všechny členy posloupnosti $\frac{n^2+1}{n^2-1}$ v intervalu platnosti odhadu, a tedy

$$1 - \frac{1}{\frac{n^2+1}{n^2-1}} = \frac{2}{n^2+1} \leq \ln \frac{n^2+1}{n^2-1} \leq \frac{n^2+1}{n^2-1} - 1 = \frac{2}{n^2-1}.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2-1} = 0,$$

platí podle věty o limitě sevřené posloupnosti („o dvou policajtech“) i (R.2). Použitý odhad však nabízí mnohem více, než jen ověření nutné podmínky konvergence. Velmi snadno pomocí něj rozhodneme i další test alternující řady, absolutní konvergenci. Řady $\sum \frac{2}{n^2+1}$ i $\sum \frac{2}{n^2-1}$ lze pomocí limitního srovnávacího kritéria srovnat s řadou $\sum \frac{2}{n^2}$, o které víme, že konverguje (viz příklad L). Proto s ní srovnáme řadu horních odhadů – to nám následně umožní pomocí nelimitní verze srovnávacího kritéria ověřit konvergenci řady $\sum |a_n|$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2+1}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 1 \in (0, \infty),$$

konvergence řad $\sum \frac{2}{n^2-1}$ a $\sum \frac{2}{n^2}$ je tedy ekvivalentní a protože druhá z nich konverguje, konverguje i první. Ta je ovšem konvergentní majorantou řady $\sum |a_n|$, která tudíž také konverguje. To znamená, že řada (R.1) konverguje absolutně a použít Leibnizovo kritérium již není třeba.