

1. Vyjádřete koeficienty vektoru $(-2, -8, 9)$ vzhledem k následující bázi vektorového prostoru V_3 : $(3, 0, 5)$, $(1, 2, 1)$, $(5, 2, -2)$.
Řešení: $[2, -3, -1]$.
2. Určete všechny hodnoty parametru u , pro které vektor \vec{a} patří do vektorového prostoru generovaného vektory \vec{b}, \vec{c} : $\vec{a} = (2, u, -1)$, $\vec{b} = (5, 1, 2)$, $\vec{c} = (-3, 2, 3)$.
Řešení: $u = -\frac{5}{7}$.
3. Zjistěte, zda je vektor u_1 generován vektory u_2, u_3 a pokud ano, určete jeho koeficienty vzhledem k bázi: $u_1 = (4, -7, 9)$, $u_2 = (2, 1, -1)$, $u_3 = (5, -2, 3)$.
Řešení: Ano; $[-3, 2]$.
4. Určete všechny hodnoty parametru u , pro které tvoří následující skupina vektorů bázi vektorového prostoru V_3 : $(2, 3, -1)$, $(5, u, 2)$, $(-3, 2, 1)$.
Řešení: $u \in \mathbb{R} \setminus \{-51\}$.
5. Proveďte diskusi hodnosti vektorového prostoru generovaného následujícími čtyřmi vektory v závislosti na parametru u :
(a) $(2, -3, 4)$, $(3, 2, -3)$, $(4, u, -2)$, $(5, 2, -7)$ (b) $(3, -2, 4)$, $(2, 3, -1)$, $(4, u, 2)$, $(3, -2, -5)$
Řešení:
(a) $h = 3$ pro každé u (b) $h = 3$ pro každé u
6. Určete hodnotu lineárního prostoru generovaného funkcemi $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = 2 + x - x^2$ a $h(x) = 2x^2 - a$ v závislosti na parametru a .
Řešení: $h = 2$ pro $a = 2$, jinak $h = 3$.
7. Určete bez použití determinantu, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Ano.

8. Nalezněte ortogonální doplněk k prostoru generovanému vektory: $(1, 0, 1, 0)$, $(2, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$.
Řešení: $\{(-1, 2, 1, -2)\}$.
9. Určete obecné řešení soustavy lineárních rovnic a výsledek interpretujte geometricky. Dále určete dvě základní řešení této soustavy:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 18x_4 &= -4 \\ 4x_1 + 9x_2 + 19x_3 - 48x_4 &= -14 \end{aligned}$$

Řešení: $\vec{x} = (1 + 2s + 3t, -2 - 3s + 4t, s, t)$; $X = [1, -2, 0, 0] + s[2, -3, 1, 0] + t[3, 4, 0, 1]$, rovina v E_4 ; $(1, -2, 0, 0)$, $\left(0, -\frac{10}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$.

Pozn. Řešení soustavy lineárních rovnic závislé na parametru (a tedy i každé úlohy k ní vedoucí) má nekonečně mnoho ekvivalentních vyjádření. Konkrétní výsledek závisí na tom, jakým způsobem byla soustava (resp. její matice) upravována a jak byly zvoleny parametry. Odlišný tvar výsledku tedy v tomto případě nemusí znamenat jeho nesprávnost. Výsledky, které na parametrech nezávisí (např. základní řešení), však musí být u všech řešení shodné.

10. Stanovte obecné řešení a dvě základní řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 16x_4 &= 15 \\ -6x_1 - x_2 + 8x_3 - 17x_4 &= -24 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 13x_4 &= 13 \end{aligned}$$

Řešení: $\vec{x} = (1 + 2t, 2 - 5t, -2 + 3t, t)$; $X = [1, 2, -2, 0] + t[2, -5, 3, 1]$, přímka v E_4 ; $(1, 2, -2, 0)$, $\left(0, \frac{9}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

11. Udejte podmínku pro číslo a , aby daná soustava lineárních rovnic
(i) měla nekonečně mnoho řešení,
(ii) neměla řešení.

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x + y &= 3 \\ 3x + y + z &= a \end{aligned}$$

Řešení:

(i) $a = 4$

(ii) $a \neq 4$

12. Vypočítejte čísla a, b tak, aby platila maticová rovnost $CD = DC$:

(a) $C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Řešení:

(a) $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{7}{3}$ (b) $a = b = 2$

Pozn. Výsledek zde vyjde jako řešení soustavy čtyř rovnic o neznámých a, b . Přestože k vypočtení neznámých stačí dvě z těchto rovnic, je nutné výsledek dosadit do zbývajících dvou a ověřit jejich platnost. V případě opomenutí tohoto kroku nelze postup uznat za správný.

13. Řešte maticovou rovnici $AX = XA$, kde

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení:

(a) $X \in \llbracket A, J \rrbracket$ (b) $X \in \llbracket A, J \rrbracket$

14. Pomocí metody inverzní matice řešte soustavu:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Řešení: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 23 \\ -9 \end{pmatrix}, x = \frac{23}{35}, y = -\frac{9}{35}.$

15. Vyjádřete nejprve obecně matici X z maticové rovnice. Poté do výsledku dosadte zadané matice C, D a vypočítejte:

(a) $X - 2C = DX, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
(b) $XD - C = 3X, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Řešení:

(a) $X = 2(J - D)^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -4 \\ -\frac{11}{4} & 2 \end{pmatrix}$ (b) $X = C(D - 3J)^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

16. Řešte maticovou rovnici s neznámou X a uveďte podmínku existence a jednoznačnosti řešení: $AX = C - X - BX$.

Řešení: $X = (A + B + J)^{-1}C$, pokud je $A + B + J$ regulární.

17. Spočítejte determinant:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: 49.

18. Pomocí Cramerova pravidla určete x, y ze soustavy:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 3 \\ -x + 4y - 7z &= -6 \\ 3x + 2y &= -3 \end{aligned}$$

Řešení: $|A| = 14; |A_x| = 0, x = 0; |A_y| = -21, y = -\frac{3}{2}.$

19. Určete obecnou rovnici roviny, která prochází bodem P a je kolmá na přímkou procházející body C, D :

(a) $P = [2, 1, -3], C = [-1, 3, 2], D = [1, -1, 1]$ (b) $P = [-1, 2, 5], C = [-1, 1, 2], D = [2, 2, -1]$

Řešení:

(a) $2x - 4y - z = 3$ (b) $3x + y - 3z = -16$

20. Určete parametrickou rovnici přímky procházející počátkem a kolmé na rovinu $X = [-1, 4, -3] + u(1, -1, 2) + v(-1, 0, -1)$.
 Řešení: $X = [0, 0, 0] + t(1, -1, -1)$.
21. Určete parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem C a je kolmá na rovinu procházející body P, R, S : $C = [2, -1, 3], P = [-1, 2, 1], R = [1, -3, 2], S = [3, 1, -1]$.
 Řešení: $X = [2, -1, 3] + t(11, 8, 18)$.
22. Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky procházející body B, C : $A = [-1, 0, 1], B = [2, -1, 1], C = [1, 0, -1]$.
 Řešení: $\frac{\sqrt{66}}{3}$
23. Podle Sylvestrové věty určete typ kvadratické formy zadané následující maticí koeficientů:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: $D_1 = -2, D_2 = 3, D_3 = -6, D_4 = -36$; indefinitní.

24. Určete typ kvadratické formy v závislosti na reálném parametru a : $k(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + (a+1)x_3^2$.

Řešení: kanonický tvar $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; pozitivně definitní pro $a > 0$, pozitivně semidefinitní pro $a = 0$, indefinitní pro $a < 0$.

25. Určete $\mathcal{D}(f)$ a $\mathcal{H}(f)$ funkce $f(x) = \arcsin(\text{sign}(x))$ a nakreslete její graf.

Řešení: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}; f(x) = \frac{\pi}{2} \text{sign}(x)$.

26. Určete inverzní funkci k funkci $f, \mathcal{D}(f^{-1})$ a $\mathcal{H}(f^{-1})$:

(a) $f(x) = \frac{\pi}{4} + 3 \arcsin(5x)$ (b) $f(x) = 3 - \arcsin(5x)$ (c) $f(x) = 3 \ln(2x + 1)$

Řešení:

(a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{5} \sin \frac{x - \frac{\pi}{4}}{3}, \mathcal{D}(f^{-1}) = \left\langle -\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\rangle, \mathcal{H}(f^{-1}) = \left\langle -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle$

(b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{5} \sin(3 - x), \mathcal{D}(f^{-1}) = \left\langle 3 - \frac{\pi}{2}, 3 + \frac{\pi}{2} \right\rangle, \mathcal{H}(f^{-1}) = \left\langle -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle$

(c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{3}} - 1), \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f^{-1}) = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

27. Určete inverzní funkci k funkci $f(x) = x^2 - 4x + 5$ na intervalu $(-\infty, 2)$.

Řešení: $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$.

28. Nalezněte intervaly, v nichž existuje inverzní funkce k funkci f . Určete tyto funkce, jejich definiční obory a obory hodnot.

(a) $f(x) = e^{1+x^2}$

Řešení:

(a) $f_1 := f \upharpoonright \langle 0, \infty \rangle, f_2 := f \upharpoonright (-\infty, 0), f_1^{-1}(x) = \sqrt{\ln(x) - 1}, f_2^{-1}(x) = -\sqrt{\ln(x) - 1}, \mathcal{D}(f_1^{-1}) = \mathcal{D}(f_2^{-1}) = \langle e, \infty \rangle$

29. Vypočtěte limitu posloupnosti:

(a) $\sqrt{n^2 - 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 4n + 1}$ (b) $\frac{2(-1)^n}{3 - (-1)^n}$

Řešení:

(a) $-\frac{7}{2}$ (b) neexistuje; $a_{2n} = 1, a_{2n-1} = -\frac{1}{2}$

30. Nalezněte všechny hodnoty parametru x , pro které posloupnost $a_n = (3 - x^2)^n$ nemá limitu.

Řešení: $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

31. Spočtěte limity v krajních bodech $\mathcal{D}(f)$: $f(x) = \frac{x}{\text{arctg } x}$

Řešení: $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), f(-\infty+) = f(\infty-) = \infty, f(0\pm) = 1$.

32. Vypočtěte limity funkce f v krajních bodech definičního oboru a načrtněte graf funkce f v okolí těchto bodů (bez použití derivací):

$$(a) f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+4} \quad (b) f(x) = \ln \frac{x+3}{x-1} \quad (c) f(x) = e^{\frac{x-1}{x+3}} \quad (d) f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+3}{x-1}$$

$$(e) f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+4}{2-x} \quad (f) f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

Řešení:

$$(a) \mathcal{D}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, \infty), \quad (b) \mathcal{D}(f) = (-\infty, -3) \cup (1, \infty),$$

$$f(-\infty+) = f(\infty-) = 0 \quad f(-\infty+) = f(\infty-) = 0$$

$$f(1-) = f(4-) = -\infty, \quad f(-3-) = -\infty, f(1+) = \infty,$$

$$f(1+) = f(4+) = \infty,$$

$$(c) \mathcal{D}(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, \infty), \quad (d) \mathcal{D}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty),$$

$$f(-\infty+) = f(\infty-) = e \quad f(-\infty+) = f(\infty-) = \frac{\pi}{4}$$

$$f(-3-) = \infty, f(-3+) = 0, \quad f(1-) = \pi, f(1+) = 0,$$

$$(e) \mathcal{D}(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty), \quad (f) \mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty),$$

$$f(-\infty+) = f(\infty-) = \frac{3}{4}\pi \quad f(-\infty+) = f(\infty-) = 0$$

$$f(2-) = 0, f(2+) = \pi, \quad f(-1-) = f(1-) = -\infty,$$

$$f(-1+) = f(1+) = \infty,$$

33. Vypočítejte limitu $\lim \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arccotg} x}$ pro $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ a $x \rightarrow -\infty$. Znázorněte na grafu.

Řešení: $f(-\infty+) = -\frac{1}{2}$, $f(0\pm) = 0$, $f(\infty-) = \infty$.

34. Dodefinujte funkci f tak, aby byla spojitá v bodě c :

$$(a) f(x) = \frac{\sin 3x}{x^2 - x}, c = 0 \quad (b) f(x) = (2e^x - 1)^{\frac{1}{x}}, c = 0$$

Řešení:

$$(a) f(0) := -3 \quad (b) f(0) := e^2$$

35. Pomocí Wronskiánu rozhodněte, zda jsou následující funkce lineárně závislé: $f_1 = 2$, $f_2 = x^2 + x + 2$, $f_3 = x - 1$.

$$\text{Řešení: } \begin{vmatrix} 2 & x^2 + x + 2 & x - 1 \\ 0 & 2x + 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \text{ funkce jsou lineárně nezávislé.}$$

36. Určete Taylorův polynom k -tého stupně funkce f v bodě a :

$$(a) f(x) = x^2 \sin x, a = 0, k = 3 \quad (b) f(x) = \ln(\cos x), a = 0, k = 3$$

$$(c) f(x) = \cotg x, a = \frac{\pi}{4}, k = 2$$

Řešení:

$$(a) T_3(x) = x^3 \quad (b) T_3(x) = -\frac{1}{2}x^2 \quad (c) T_2(x) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

37. Určete lokální extrémy a intervaly monotonie funkce f :

$$(a) f(x) = (2x+3)e^{2x-1} \quad (b) f(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{x^2}$$

$$(c) f(x) = 8 \operatorname{arctg}(2x) - \ln(1+4x^2) \quad (d) f(x) = \ln(1+9x^2) + 6 \operatorname{arccotg}(3x)$$

$$(e) f(x) = x + 3\sqrt[3]{(x-2)^2} \quad (f) f(x) = x + 3\sqrt[3]{(1+2x)^2}$$

Řešení:

- (a) $f \searrow$ na $(-\infty, -2)$, \nearrow na $(-2, \infty)$, lok. (i glob.) min. v $x = -2$, lok. (ani glob.) max. nemá
- (b) $f \nearrow$ na $(0, \sqrt{e})$, \searrow na (\sqrt{e}, ∞) , lok. (i glob.) max. v $x = \sqrt{e}$, lok. (ani glob.) min. nemá
- (c) $f \nearrow$ na $(-\infty, 2)$, \searrow na $(2, \infty)$, lok. (i glob.) max. v $x = 2$, lok. (ani glob.) min. nemá
- (d) $f \searrow$ na $(-\infty, 1)$, \nearrow na $(1, \infty)$, lok. (i glob.) min. v $x = 1$, lok. (ani glob.) max. nemá
- (e) $f \nearrow$ na $(-\infty, -6)$ a $(2, \infty)$, \searrow na $(-6, 2)$, lok. min. v $x = 2$, lok. max. v $x = -6$
- (f) $f \nearrow$ na $(-\infty, -\frac{65}{2})$ a $(-\frac{1}{2}, \infty)$, \searrow na $(-\frac{65}{2}, -\frac{1}{2})$, lok. min. v $x = -\frac{1}{2}$, lok. max. v $x = -\frac{65}{2}$

38. Určete lokální extrémy a intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $f: f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$.

Řešení: lok. min. v $x = 0$, lok. max. v $x = \frac{8}{27}$, $f \frown$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ (pozor, ne na $\mathbb{R}!$).

39. Pro funkci f určete inflexní body a intervaly, ve kterých je tato funkce konvexní nebo konkávní:

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{3} \ln x}{x} \quad (b) f(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad (c) f(x) = \sqrt{3} \ln^2 x$$

Řešení:

- (a) $f \frown$ na $(0, e^{\frac{3}{2}})$, \smile na $(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$, inflexe v $x = e^{\frac{3}{2}}$
- (b) $f \frown$ na $(-\infty, -3)$, \smile na $(-3, 0)$ a $(0, \infty)$, inflexe v $x = -3$

(c) $f \curvearrowright$ na $(0, e)$, \curvearrowleft na $\langle e, \infty \rangle$, inflexe v $x = e$

40. Naleznete extrémů funkce $f(x) = x(x - 6)^2$ v intervalu $\langle 0, 8 \rangle$.

Řešení: $\min f = 0$, $\max f = 32$.

41. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x)$ na intervalu I : $f(x) = x^2 e^{2x+4}$, $I = \langle -2, 3 \rangle$.

Řešení: $\min f = 0$, $\max f = 9e^{10}$.

42. Naleznete globální extrémů funkce $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{18}}$.

Řešení: $\min f = -\frac{3}{\sqrt{e}}$, $\max f = \frac{3}{\sqrt{e}}$.

43. Vypočtete:

$$(a) \int x \operatorname{arctg} x \, dx \quad (b) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx \quad (c) \int \frac{3}{x^2 - 2x + 5} \, dx$$

Řešení:

$$(a) \frac{1}{2} ((x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - x) + c \quad (b) \ln x (\ln(\ln x) - 1) + c \quad (c) \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + c$$

44. K funkci f naleznete primitivní funkci, která prochází bodem A :

$$(a) f(x) = \arcsin x, A = \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6} \right] \quad (b) f(x) = x \sin 3x, A = \left[\frac{\pi}{3}, 1 \right]$$

$$(c) f(x) = 12 \sin x \cos^3 x, A = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{16} \right]$$

Řešení:

$$(a) F(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (b) F(x) = \frac{1}{9} (\sin 3x - 3x \cos 3x) + 1 - \frac{\pi}{9}$$

$$(c) F(x) = 2 - 3 \cos^4 x$$

45. Vypočtete integrál:

$$(a) \int_0^1 (2x + 1)^{12} \, dx \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + 2x)^5} \, dx \quad (c) \int_1^{\infty} \frac{1}{(2x + 1)^3} \, dx \quad (d) \int_0^{\infty} x e^{-x} \, dx$$

$$(e) \int_3^5 \frac{1}{x^2 - x - 2} \, dx \quad (f) \int_2^{\infty} \frac{2}{x^2 - 4x + 8} \, dx$$

Řešení:

$$(a) \frac{3^{13} - 1}{26} \quad (b) \frac{1}{8} \quad (c) \frac{1}{36} \quad (d) \Gamma(2) = 1 \quad (e) \frac{\ln 2}{3} \quad (f) \frac{\pi}{2}$$

46. Určete obsah plochy, ohraničené křivkami $y = 2x^2$, $y = 3 - x$ a $y = 0$.

Řešení: $\frac{8}{3}$

47. Převodem na hodnotu funkcí Γ a B vypočtete integrál:

$$(a) \int_0^{\infty} x^5 e^{-x^2} \, dx \quad (b) \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} \, dx \quad (c) \int_0^1 \sqrt{x^3 - x^4} \, dx$$

Řešení:

$$(a) \frac{1}{2} \Gamma(3) = 1 \quad (b) \frac{1}{2} \Gamma(2) = \frac{1}{2} \quad (c) B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{16} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{16}$$

48. Vypočtete obecné řešení diferenciální rovnice:

$$(a) y'(x - 3) = 3y - 15 \quad (b) y' \sqrt{1 - x^2} = xy \quad (c) y' - e^{-x} = y^2 e^{-x}$$

$$(d) y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^3 + 2} \quad (e) y' - \frac{y}{x} = x^2 - 1 \quad (f) y' + 6y = 2e^{3x}$$

$$(g) y'' - 3y' + 2y = 4x^2 \quad (h) y'' + 4y' + 4y = 4x \quad (i) y'' + 4y' + 4y = 4(x + 1)^2$$

$$(j) y'' + 4y = 3 \quad (k) y'' + 7y' + 12y = 2e^{-4x}$$

Řešení:

$$(a) y = \begin{cases} c_1 (x - 3)^3 + 5, & x \in (-\infty, 3) \\ c_2 (x - 3)^3 + 5, & x \in \langle 3, \infty \rangle \end{cases}, \quad \bar{c} \in \mathbb{R}^2$$

$$(b) y = c e^{-\sqrt{1-x^2}}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$(c) y = \operatorname{tg}(c - e^{-x}), \quad c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \infty\right), \\ x \in \left(-\ln\left(c + \frac{\pi}{2}\right), \infty\right) \text{ pro } c \leq \frac{\pi}{2}, \quad x \in \left(-\ln\left(c + \frac{\pi}{2}\right), -\ln\left(c - \frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ pro } c > \frac{\pi}{2}$$

$$(d) y = \frac{\ln|x^3+2|+c}{3x^2}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in (-\infty, -\sqrt[3]{2}), \quad x \in (-\sqrt[3]{2}, 0), \quad x \in (0, \infty)$$

$$(e) y = x \left(\frac{x^2}{2} - \ln|x| + c \right), \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in (-\infty, 0), \quad x \in (0, \infty)$$

$$(f) y = \frac{2}{9} e^{3x} + c e^{-6x}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(g) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7, \quad \bar{c} \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (h) $y = (c_1 x + c_2) e^{-2x} + x - 1$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}$
 (i) $y = (c_1 x + c_2) e^{-2x} + x^2 + \frac{1}{2}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}$
 (j) $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \frac{3}{4}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}$
 (k) $y = c_1 e^{-3x} + (c_2 - 2x) e^{-4x}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}$

49. Vypočítejte partikulární řešení diferenciální rovnice určené počáteční podmínkou:

(a) $y' \sqrt{1+x^2} = xy$, $y(0) = 1$ (b) $y' + x^2 y = x^2$, $y(0) = 2$

Řešení:

(a) $y = e^{\sqrt{1+x^2}-1}$ (b) $y = 1 + e^{-\frac{x^3}{3}}$

50. Určete diferenci posloupnosti $a_n = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Řešení: $\Delta a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

51. Vypočítejte obecné řešení diferenční rovnice:

(a) $y_{n+2} - 2\sqrt{3}y_{n+1} + 4y_n = 0$ (b) $y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 1$ (c) $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 2$
 (d) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 1$ (e) $y_{n+1} + y_n = (n-3)2^{-n}$

Řešení:

(a) $y_n = (c_1 \cos \frac{n\pi}{6} + c_2 \sin \frac{n\pi}{6}) 2^n$ (b) $y_n = (c_1 + c_2 n)(-3)^n + \frac{1}{16}$
 (c) $y_n = (c_1 + c_2 n)3^n + \frac{1}{2}$ (d) $y_n = c_1 + c_2 n + \frac{1}{2}n^2$
 (e) $y_n = c_1(-1)^n + \left(\frac{2}{3}n - \frac{20}{9}\right) 2^{-n}$

52. Určete y_n , jestliže $\Delta y_n = 3n + 2$, $y_1 = 5$.

Řešení: $y_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 3$

53. Určete vzorec pro n -tý člen posloupnosti (y_n) , která je zadána rekurentně podmínkami:

(a) $y_{n+2} - 4y_{n+1} = 5y_n$, $y_1 = 2$, $y_2 = -1$ (b) $y_{n+2} - 4y_{n+1} = 5y_n$, $y_1 = 13$, $y_2 = 72$

Řešení:

(a) $y_n = \frac{11}{6}(-1)^{n-1} + \frac{1}{6}5^{n-1}$ (b) $y_n = \frac{7}{6}(-1)^n + \frac{17}{6}5^n$

54. Nalezněte předpis pro n -tý částečný součet posloupnosti (a_n) : $a_n = n3^n$.

Řešení: $y_n = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}\right) 3^{n+1}$

55. Určete vzorec pro součet prvních n členů posloupnosti (a_n) :

(a) $a_n = 1 + 2n^2$, $n \in \mathbb{N}$ (b) $a_n = 3 + n^2$, $n \in \mathbb{N}$

Řešení:

(a) $y_n = \frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{4}{3}n$ (b) $y_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{19}{6}n$

56. S použitím diferenčních rovnic vypočítejte součet řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}$.

Řešení: $\lim \left[-\frac{2}{9} + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = -\frac{2}{9}$

57. Vypočítejte součet řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5 \cdot 3^{n-1}}$.

Řešení: $\frac{6}{5}$.

58. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{5^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arccotg} n$

Řešení:

(a) KA (b) KN (c) KA (d) KN

59. Vyšetřete obor konvergence a součet funkční řady:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(x+2)^n}{(-3)^{n+1}}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3x^{n+1}}{2^{n-1}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}(x-4)^n}{3}$

Řešení:

(a) OK = $(-5, 1)$, $s \begin{cases} = -\infty & \text{pro } x \leq -5 \\ = \frac{2(x+2)}{3(x+5)} & \text{pro } x \in (-5, 1) \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$
 (b) OK = $(-2, 2)$, $s \begin{cases} = \infty & \text{pro } x \geq 2 \\ = \frac{12x}{2-x} & \text{pro } x \in (-2, 2) \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x \leq -2 \end{cases}$

$$(c) \text{ OK} = \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right), s \begin{cases} = -\infty & \text{pro } x \leq \frac{7}{2} \\ = \frac{x-4}{3(2x-7)} & \text{pro } x \in \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right) \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x \geq \frac{9}{2} \end{cases}$$

60. Vyšetřete obor konvergence funkční řady:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^n}{n 2^{n-1}} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^{n-1} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(x+1)^n}{n(-3)^n} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(10x)^n}{n^2}$$

Řešení:

$$(a) \text{ OK} = \langle -2, 2 \rangle \quad (b) \text{ OK} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (c) \text{ OK} = (-4, 2) \quad (d) \text{ OK} = \left\langle -\frac{1}{10}, \frac{1}{10} \right\rangle$$

61. Vyšetřete obor konvergence a absolutní konvergence řady:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)^n}{n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^{n+1}}{(-1)^n}$$

Řešení:

$$(a) \text{ OK} = \left\langle -\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle, \text{ OAK} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad (b) \text{ OK} = \text{OAK} = (-1, 1)$$

62. Určete $\mathcal{D}(f)$, graficky jej znázorněte a rozhodněte, zda tato množina je otevřená, uzavřená, omezená, kompaktní:

$$(a) f(x, y) = \frac{y-x}{\ln(y+x^2)} \quad (b) f(x, y) = \sqrt{\ln x - y} - \arccos 3y$$

Řešení:

(a) $\mathcal{D}(f) = \{[x, y] : y > -x^2 \wedge y \neq 1 - x^2\}$, je otevřená, není uzavřená, omezená ani kompaktní

(b) $\mathcal{D}(f) = \{[x, y] : y \leq \ln x \wedge -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}\}$, je uzavřená, není otevřená, omezená ani kompaktní

63. Graficky znázorněte definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + x\sqrt{y-x}$. Dále vypočtěte $\partial_x f$.

$$\text{Řešení: } \partial_x f(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + \frac{2y-3x}{2\sqrt{y-x}}$$

64. Určete druhý diferenciál funkce $f(x, y)$ v bodě C : $f(x, y) = 2xe^{3x-2y}$, $C = [-1, -2]$.

$$\text{Řešení: } d^2 f(C)(h_1, h_2) = -6eh_1^2 + 16eh_1h_2 - 8eh_2^2.$$

65. Rozhodněte, zda rovnice $x^3 + y^3 = 2x^2 + xy - 1$ definuje v okolí bodu $P = [1, 0]$ implicitní funkci f proměnné x . Pokud ano, určete $f'(1)$.

Řešení: Ano, $f'(1) = -1$.

66. Určete lokální extrémy funkce f : $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^2$.

Řešení: Lokální minimum v $[6, 18]$, lokální maximum nemá, sedlo v $[0, 0]$.

67. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y)$ vzhledem k vazební podmínce:

$$(a) f(x, y) = x - y, \quad x^2 + y^2 = 2 \quad (b) f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 4, \quad x - 3y + 1 = 0$$

$$(c) f(x, y) = y^2 - xy + x^2, \quad x - 2y + 1 = 0$$

Řešení:

$$(a) \text{ min. } f(-1, 1) = -2, \text{ max. } f(1, -1) = 2 \quad (b) \text{ min. } f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}, \text{ max. neexistuje}$$

$$(c) \text{ min. } f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \text{ max. neexistuje,}$$

68. Určete lokální vázané extrémy funkce $f(x, y) = 2x + 4y$ na množině popsané rovnicí $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$.

Řešení: Lokální vázané minimum v $[1, -2]$, lokální vázané maximum v $[3, 2]$.

69. Určete absolutní extrémy funkce $f(x, y)$ na množině zadané danou nerovností: $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y$, $x^2 + y^2 - 20 \leq 0$.

Řešení: Minimum $f(-1, -2) = -5$, maximum $f(2, 4) = 40$.

70. Vyšetřete absolutní extrémy funkce $f(x, y)$ na úsečce AB : $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y$, $A = [2, -3]$, $B = [-2, 5]$.

Řešení: Minimum $f(1, -1) = 0$, maximum $f(B) = 45$.